KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
BADAN STANDAR, KURIKULUM, DAN ASESMEN PENDIDIKAN
PUSAT PERBUKUAN

Buku Panduan Guru

Matematika

Dicky Susanto, dkk.

SMA/SMK KELAS XI

Buku Panduan Guru Matematika
untuk SMA/SMK Kelas XI

Penulis
Dicky Susanto
Savitri K. Sihombing
Marianna Magdalena Radjawane
Yulian Candra
Daniel Sinambela

Penelaah
Widowati
Ali Mahmudi

Penyelia/Penyelaras
Supriyatno
E. Oos M. Anwas
NPM Yuliarti Dewi

Ilustrator
Faris Majduddin Naufal

Penyunting
Tri Hartini

Penata Letak (Desainer)
M. Firdaus Jubaedi
Adityo Bayuaji

Penerbit
Pusat Perbukuan
Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan
Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Komplek Kemdikbudristek Jalan RS. Fatmawati, Cipete, Jakarta Selatan
https://buku.kemdikbud.go.id

Cetakan Pertama, 2021
ISBN 978-602-244-536-4 (no.jil.lengkap)
978-602-244-789-4 (jil.2)

Isi buku ini menggunakan huruf Linux Libertine12/16pt., Philipp H. Poll.
x, 190 hlm.: 17,6 × 25 cm.

Kata Pengantar

Pusat Perbukuan; Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan; Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset dan Teknologi sesuai tugas dan fungsinya mengembangkan kurikulum yang mengusung semangat merdeka belajar mulai dari satuan Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah. Kurikulum ini memberikan keleluasaan bagi satuan pendidikan dalam mengembangkan potensi yang dimiliki oleh peserta didik. Untuk mendukung pelaksanaan kurikulum tersebut, sesuai Undang-Undang Nomor 3 tahun 2017 tentang Sistem Perbukuan, pemerintah dalam hal ini Pusat Perbukuan memiliki tugas untuk menyiapkan Buku Teks Utama.

Buku teks ini merupakan salah satu sumber belajar utama untuk digunakan pada satuan pendidikan. Adapun acuan penyusunan buku adalah Keputusan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia Nomor 958/P/2020 tentang Capaian Pembelajaran pada Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah. Sajian buku dirancang dalam bentuk berbagai aktivitas pembelajaran untuk mencapai kompetensi dalam Capaian Pembelajaran tersebut. Penggunaan buku teks ini dilakukan secara bertahap pada Sekolah Penggerak dan SMK Pusat Keunggulan, sesuai dengan Keputusan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Nomor 162/M/2021 tentang Program Sekolah Penggerak.

Sebagai dokumen hidup, buku ini tentunya dapat diperbaiki dan disesuaikan dengan kebutuhan. Oleh karena itu, saran-saran dan masukan dari para guru, peserta didik, orang tua, dan masyarakat sangat dibutuhkan untuk penyempurnaan buku teks ini. Pada kesempatan ini, Pusat Perbukuan mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah terlibat dalam penyusunan buku ini mulai dari penulis, penelaah, penyunting, ilustrator, desainer, dan pihak terkait lainnya yang tidak dapat disebutkan satu per satu. Semoga buku ini dapat bermanfaat khususnya bagi peserta didik dan guru dalam meningkatkan mutu pembelajaran.

Jakarta, Oktober 2021
Plt. Kepala Pusat,

Supriyatno
NIP 19680405 198812 1 001

Prakata

Puji syukur kami panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa atas berkat dan rahmat-Nya dalam menyelesaikan penulisan Buku Guru ini. Buku ini disusun untuk menjadi pendamping dan pedoman bagi guru yang menggunakan Buku Siswa yang memenuhi Capaian Pembelajaran Fase F untuk SMA/SMK Kelas XI.

Bagi para siswa, matematika sering kali dianggap pelajaran yang abstrak, sulit, dan kurang relevan dalam kehidupan. Padahal pada hakikatnya, banyak konsep dan prinsip matematika justru muncul di alam dan dekat dengan kehidupan sehari-hari. Harapan kami, buku ini dapat membimbing para guru menjadi agen pengubah mispersepsi mengenai matematika dengan menggunakan pendekatan yang lebih kontekstual melalui permasalahan kehidupan nyata dan melibatkan siswa secara aktif dalam bereksplorasi dengan pertanyaan penuntun.

Sebagian besar pembelajaran matematika dalam Buku Siswa juga diupayakan menarik perhatian dan minat siswa sehingga "tidak merasa sedang belajar matematika". Buku ini akan memberikan panduan bagi guru dalam mengajak siswa untuk berpikir kritis dan kreatif untuk mengembangkan keterampilan berpikir aras tinggi (HOTS). Selain itu, di banyak kesempatan guru juga akan diberikan langkah-langkah dalam menerapkan berdiskusi, komunikasi, kegiatan kerja sama, dan menggunakan penggunaan teknologi dalam menyelesaikan permasalahan sehingga siswa diasah kemampuannya sesuai dengan Profil Pelajar Pancasila dan keterampilan abad ke-21. Pada bagian panduan umum buku, guru juga akan mendapatkan penjabaran terperinci mengenai perubahan kurikulum, pendekatan pembelajaran, sistem penilaian, serta elemen-elemen esensial lainnya yang terkandung dalam Buku Siswa. Bagian ini diharapkan dapat memberikan bekal bagi para guru saat mengimplementasikan pendekatan pembelajaran yang sesuai dengan Buku Siswa.

Kami menghaturkan ucapan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah membantu mewujudkan buku ini, khususnya para penelaah, yaitu Prof. Widowati (Universitas Diponegoro) dan Dr. Ali Mahmudi (Universitas

Negeri Yogyakarta) untuk bimbingan dan masukan yang berharga dari awal sampai akhir proses penulisan.

Akhir kata, kami berharap buku ini dapat mendukung guru dalam melaksanakan pembelajaran matematika SMA/SMK Kelas XI yang efektif dan kontekstual, dan semakin banyak siswa yang mulai menyenangi matematika dan merasakan manfaat belajar matematika.

Selamat menabur benih kesukaan bermatematika!

Jakarta, Oktober 2021

Tim Penulis

Daftar Isi

Panduan Umum

A. Pendahuluan 2

B. Capaian Pembelajaran 3

C. Strategi Umum Pembelajaran 5

D. Penjelasan Bagian-Bagian Buku Siswa 6

E. Alternatif Pembelajaran 11

F. Sistem Penilaian Hasil Belajar 14

G. Kegiatan Tindak Lanjut 14

H. Interaksi Guru dengan Orang Tua 15

Bab 1 Komposisi Fungsi dan Fungsi Invers 17

Gambaran Umum Bab 18

Skema Pembelajaran 19

A. Fungsi 21

- Kunci Jawaban Latihan1.1 24
- Eksplorasi 1.1 25
- Masalah Pertama 25
- Masalah Kedua 26
- Masalah Ketiga 28
- Kunci Jawaban Latihan 1.2 31
- Rangkuman 32

B. Komposisi Fungsi 33

- Eksplorasi 1.2 35
- 1. Penjumlahan dan Pengurangan Fungsi 36
- 2. Perkalian dan Pembagian Fungsi 38

Kunci Jawaban Latihan 1.3 39
3. Komposisi Fungsi 41
Kunci jawaban Eksplorasi 1.3 42
Kunci Jawaban Eksplorasi 1.4 44
Kunci Jawaban Eksplorasi 1.5 46
Sifat Asosiatif 47
Jawaban Latihan 1.4 48
Refleksi 50
C. Fungsi Invers 50
Kunci Jawaban Eksplorasi 1.6 52
Kunci Jawaban Eksplorasi 1.7 56
Kunci Jawaban Eksplorasi 1.8 58
Refleksi 59
Jawaban Latihan 1.5 59
Jawaban Uji Kompetensi 64
Pengayaan 66

Bab 2 Lingkaran 67
Peta Konsep 68
Gambaran Umum Bab 68
Skema Pembelajaran 69
Panduan Pembelajaran 71
A. Lingkaran dan Busur Lingkaran 71
Eksplorasi 2.1 76
Jawaban Latihan 2.1 86
Rangkuman 93
B. Lingkaran dan Garis Singgung 93
Eksplorasi 2.2 95

Jawaban Latihan 2.2 97
Rangkuman 106
C. Lingkaran dan Tali Busur 107
Eksplorasi 2.3 108
Eksplorasi 2.4 109
Jawaban Latihan 2.3 112
Rangkuman 119
Jawaban Uji Kompetensi 120
Pengayaan 124

Bab 3 Statistika 127
Gambaran Umum Bab 128
Skema Pembelajaran 129
A. Diagram Pencar atau Diagram *Scatter* 131
Penjelasan Pembelajaran di Buku Siswa 133
Kunci Jawaban Eksplorasi 3.1 134
Kunci Jawaban Eksplorasi 3.2 137
Kunci Jawaban Latihan 3.1 139
Kunci Jawaban Latihan 3.2 140
B. Regresi Linear 141
Penjelasan Pembelajaran di Buku Siswa 144
Kunci Jawaban Eksplorasi 3.3 (No. 1–5) 146
Kunci Jawaban Eksplorasi 3.3 (No. 6–8) 147
Kunci Jawaban Eksplorasi 3.4 148
Kunci Jawaban Latihan 3.3 151
Kunci Jawaban Latihan 3.4 153

Daftar Gambar

Gambar 2.1 Sepeda dengan Berbagai Bentuk Roda 72
Gambar 2.2 Penutup Lubang Selokan 72
Gambar 2.3 Mercusuar 75
Gambar 2.4 Sudut Keliling yang Menghadap pada Busur
yang Sama 82
Gambar 2.5 Miskonsepsi mengenai Sudut Pusat dan Sudut
Lingkaran... 82
Gambar 2.6 Roda Kereta Api... 94
Gambar 2.7 Cakrawala 95
Gambar 2.8 Gerhana Matahari 106
Gambar 2.9 Busur Panah... 108
Gambar 2.10 Segitiga Sama Sisi ABC.. 125

A. Pendahuluan

Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Nomor 71 Tahun 2013 menetapkan bahwa buku teks pelajaran terdiri atas Buku Siswa dan Buku Guru. Buku Guru Matematika untuk SMA/MA Kelas XI ini memiliki tiga fungsi utama. Pertama, Buku Guru digunakan sebagai petunjuk penggunaan Buku Siswa Matematika untuk SMA/MA Kelas XI. Sebelum melakukan kegiatan pembelajaran dengan Buku Siswa, guru dapat mempelajari dahulu panduan yang ada pada Buku Guru. Buku Guru memuat penjelasan-penjelasan setiap bagian dari Buku Siswa, sehingga memberikan arahan kepada guru agar kegiatan pembelajaran berjalan sesuai dengan tujuan yang diharapkan.

Kedua, Buku Guru digunakan sebagai acuan kegiatan pembelajaran di kelas. Pada Buku Guru terdapat penjabaran mengenai tujuan pembelajaran yang akan dicapai dari setiap bab, langkah-langkah kegiatan pembelajaran, alternatif jawaban dari berbagai pertanyaan pemantik yang diberikan ketika proses pembelajaran, ide-ide kegiatan pembelajaran bagi siswa dengan kemampuan yang berbeda di kelas, serta alternatif penyelesaian dari instrumen penilaian. Dengan demikian, buku ini dapat membantu memudahkan guru untuk menentukan aktivitas pembelajaran guna mencapai pengalaman belajar yang diinginkan.

Ketiga, Buku Guru digunakan untuk memberikan gambaran mengenai metode atau pendekatan pembelajaran yang dapat diterapkan pada proses pembelajaran di kelas. Pada Buku Siswa, setiap materi pada semua bab diawali dengan konteks yang diangkat dari kehidupan nyata. Materi yang ada pada Buku Siswa juga disajikan dengan berbagai kegiatan eksplorasi yang dapat menuntun siswa dalam memahami konsep yang disajikan. Oleh karena itu, pada Buku Guru diberikan alternatif metode pembelajaran yang dapat digunakan seperti diskusi dan tanya jawab. Selain itu, diberikan pula alternatif pendekatan pembelajaran yang dapat diterapkan di kelas seperti pendekatan kontekstual dan penemuan terbimbing.

Guru juga diharapkan dapat mengembangkan metode dan pendekatan pembelajaran yang menekankan pada kecakapan abad ke-21. Untuk itu, guru dapat menggali lebih dalam kemampuan berpikir kritis, kreativitas, kerja sama, dan kemampuan berkomunikasi siswa berdasarkan kegiatan

pembelajaran yang terdapat pada Buku Siswa. Implementasi kecakapan abad ke-21 pada pembelajaran juga erat kaitannya dengan memacu siswa untuk memiliki keterampilan berpikir sederhana (LOTS) hingga keterampilan berpikir tingkat tinggi (HOTS). Dengan begitu, guru diharapkan dapat memberi ruang, kesempatan, dan pengalaman belajar yang melatih siswa tidak hanya keterampilan berpikir sederhana, tetapi juga keterampilan berpikir tingkat tinggi.

Disamping itu, hal ini sesuai dengan visi Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan yaitu pembelajaran menekankan pada Profil Pelajar Pancasila. Profil Pelajar Pancasila adalah perwujudan pelajar Indonesia sebagai pelajar sepanjang hayat yang memiliki kompetensi global dan berperilaku sesuai dengan nilai-nilai Pancasila, dengan enam ciri utama: beriman, bertakwa kepada Tuhan YME, dan berakhlak mulia, berkebinekaan global, bergotong royong, mandiri, bernalar kritis, dan kreatif. Beberapa ikon pada Buku Siswa dibuat berorientasi pada profil pelajar Pancasila seperti Ayo Bernalar, Ayo Berpikir Kritis, dan Ayo Berpikir Kreatif. Pada Buku Guru diberikan uraian dari ikon tersebut untuk menuntun guru agar dapat mengembangkan profil pelajar Pancasila dari dalam diri siswa.

Dengan berpedoman pada Buku Guru dalam menyampaikan materi pada Buku Siswa, tentu saja pada akhirnya siswa diharapkan dapat memenuhi capaian pembelajaran yang diharapkan. Siswa diharapkan dapat memahami konsep terkait komposisi fungsi dan fungsi *invers*, lingkaran, dan statistik.

B. Capaian Pembelajaran

Deskripsi Capaian Pembelajaran Fase F (Kelas XI SMA)

Pada akhir fase F, siswa dapat memodelkan fenomena hubungan antara dua besaran dengan menggunakan fungsi yang sesuai, dan mengevaluasi kesesuaian model. Siswa juga dapat menerapkan teorema tentang lingkaran. Siswa juga dapat mengevaluasi berbagai laporan berbasis statistik.

Di kelas XI, capaian pembelajaran yang akan disasar adalah siswa dapat menentukan fungsi *invers* dan komposisi fungsi sebagai dasar untuk kemudian di kelas XII siswa mampu melakukan transformasi fungsi untuk memodelkan situasi dunia nyata.

Untuk domain geometri di kelas XI, siswa diharapkan dapat menerapkan teorema untuk hubungan yang terdapat pada lingkaran, sedangkan di kelas XII akan dilanjutkan dengan kemampuan menentukan panjang busur dan luas juring lingkaran.

Fokus untuk domain analisis data dan peluang di kelas XI adalah siswa menentukan hubungan serta *trend* data dua variabel (bivariat), menentukan korelasi dan memodelkan data dengan regresi linear. Di kelas XII, siswa diharapkan dapat menggunakan peluang bebas dan bersyarat untuk menafsirkan data.

Capaian berdasarkan domain

Bilangan	-
Aljabar dan Fungsi	Di akhir fase F, siswa dapat menentukan fungsi Invers, komposisi fungsi dan transformasi fungsi untuk memodelkan situasi dunia nyata berdasarkan fungsi yang sesuai (linear, kuadrat, eksponensial).
Pengukuran	-
Geometri	Di akhir fase F, siswa menerapkan teorema tentang lingkaran, dan menentukan panjang busur dan luas juring lingkaran.
Analisis Data dan Peluang	Di akhir fase F, siswa dapat merumuskan pertanyaan, mengumpulkan informasi, menyajikan, menganalisis, hingga menarik kesimpulan dari suatu data dengan membuat rangkuman statistik deskriptif. Mengevaluasi proses acak yang mendasari percobaan statistik. Mereka menggunakan peluang bebas dan bersyarat untuk menafsirkan data.
Fungsi	-
Kalkulus	-

C. Strategi Umum Pembelajaran

Buku Siswa dirancang dengan pendekatan Pembelajaran Berbasis Penemuan Terbimbing (Discovery Learning) di mana siswa ada kesempatan melakukan eksplorasi terlebih dahulu dan dituntun melalui pertanyaan pengarah terstruktur (scaffolded questions) sehingga dapat menemukan konsep utama yang menjadi tujuan dari pembelajaran. Meskipun demikian, guru dapat menggunakan berbagai pendekatan lain disesuaikan dengan kondisi setempat.

Dalam proses pembelajaran, siswa dapat melakukan aktivitas eksplorasi baik secara individu, berpasangan, maupun berkelompok. Interaksi antarsiswa dan interaksi antarguru dan siswa menjadi dasar bagi siswa untuk membangun pemahaman yang mendalam. Guru memegang peranan yang sangat esensial di dalam mengarahkan aktivitas pembelajaran, membimbing proses berpikir siswa dan memfasilitasi diskusi di dalam kelas untuk mencapai tujuan pembelajaran yang diharapkan.

Dalam konteks pembelajaran jarak jauh (PJJ), guru dapat menggunakan pendekatan Flipped Classroom, yang artinya adalah proses pembelajarannya dibalik dari yang konvensional. Pada umumnya, materi disampaikan di kelas kemudian siswa mengerjakan tugas di luar kelas. Pendekatan Flipped Classroom membalikkan urutan ini, yaitu siswa menerima materi di rumah dan mengerjakan latihan di kelas. Dalam konteks PJJ, ini berarti siswa dapat melakukan eksplorasi dalam Buku Siswa dengan mengikuti pertanyaan penuntun secara asynchronous (sesi tidak langsung, misalnya melalui Google Classroom), kemudian ketika sesi synchronous (sesi langsung, misalnya melalui Google Meet atau Zoom), siswa berdiskusi dan mengerjakan latihan soal dengan bimbingan guru. Guru dapat juga merekam penjelasan materi sehingga siswa dapat menonton pembahasan dari soal eksplorasi termasuk penjelasan konsepnya setelah melakukan eksplorasi secara mandiri. Kegiatan di sesi synchronous lebih banyak digunakan untuk diskusi, tanya-jawab, dan memberikan umpan balik kepada siswa.

D. Penjelasan Bagian-Bagian Buku Siswa

1. Peta Konsep

Peta konsep yang terdapat pada awal bab merupakan diagram yang menunjukkan hubungan antarkonsep yang terdapat dalam setiap bab. Siswa perlu mencermati peta konsep ini untuk mendapatkan gambaran yang luas tentang isi bab tersebut.

2. Ayo Bereksplorasi

Ayo Bereksplorasi

Siswa melakukan kegiatan ini untuk menyelidiki konsep matematika yang berkaitan dengan pembahasan materi. Eksplorasi selalu dilakukan sebelum siswa mendalami konsep matematika beserta aplikasinya.

3. Ayo Berpikir Kritis

Ayo Berpikir Kritis

Siswa berpikir kritis jika dapat menganalisis informasi untuk mengambil kesimpulan atau menilai suatu hal dengan tepat. Keterampilan ini perlu kalian latih terus-menerus karena merupakan salah satu dari keterampilan abad ke-21.

4. Ayo Berpikir Kreatif

Ayo Berpikir Kreatif

Siswa berpikir kreatif jika dapat membuat ide atau alternatif solusi yang baru yang berbeda dari hal umum.

5. Ayo Mencoba

Siswa diharapkan dapat mengerjakan soal atau kegiatan sejenis setelah diberikan penjelasan penyelesaian satu atau lebih dari satu soal.

6. Penguatan Karakter

Siswa diharapkan dapat menghayati dan menerapkan karakter-karakter profil Pancasila yang perlu dipupuk sepanjang hayat dalam kegiatan pembelajaran serta kehidupan sehari-hari.

7. Ayo Berdiskusi

Bertukar pikiran dengan teman-teman dan menyatakan gagasan merupakan kegiatan yang bermanfaat untuk memperdalam pengetahuan sehingga dapat menyelesaikan masalah atau menjawab pertanyaan. Siswa juga menyampaikan ide dan gagasan secara lisan maupun tulisan.

8. Petunjuk

Petunjuk untuk siswa gunakan dalam pemecahan masalah. Arahkan siswa untuk membaca dan menggunakan bagian ini jika siswa mengalami kendala saat mencari solusi dari sebuah masalah.

9. Tahukah Kalian?

Siswa mendapatkan informasi tambahan yang berkaitan dengan materi yang sedang dipelajari yang merupakan aplikasi matematika dalam suatu fenomena atau peristiwa.

10. Ayo Berefleksi

Merenungkan dan melihat kembali secara evaluatif dan mendalam apa yang sudah dipelajari, membandingkannya, dan menarik pelajaran atau kesimpulan sederhana.

11. Ayo Mengingat Kembali

Apa yang telah siswa pelajari di kelas X berhubungan dengan apa yang akan dipelajari di kelas XI. Siswa akan lebih mudah memahami materi pelajaran kelas XI dengan pengetahuan yang telah dipelajari di kelas X.

12. Ayo Bekerja Sama

Bekerja sama merupakan salah satu bentuk dari bergotong royong. Siswa bekerja sama untuk menyelesaikan masalah atau menjawab pertanyaan matematika sehingga pemahaman siswa terhadap materi pelajaran lebih baik lagi. Selain itu, bekerja sama memerlukan saling memahami dan menghargai satu sama lain.

13. Ayo Menggunakan Teknologi

Teknologi memudahkan siswa untuk menyelesaikan masalah atau pekerjaan matematika. Siswa dapat memanfaatkan kalkulator dan berbagai aplikasi untuk mengerjakan tugas. Siswa dapat memilih teknologi yang sesuai dengan kebutuhan mereka.

14. Contoh Soal

Contoh 1

Sederhanakanlah bentuk eksponen $\frac{2^5 \times 2^3}{2^2}$

Alternatif Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\frac{2^5 \times 2^3}{2^2} &= \frac{2^{(5+3)}}{2^2}\\ &= \frac{2^8}{2^2}\\ &= 2^{8-2}\\ &= 2^6\end{aligned}$$

Bagian ini diberikan untuk membantu pemahaman siswa atas konsep yang dipelajari. Perhatikan contoh soal dan kaitkan dengan penjelasan sebelumnya agar siswa merasakan manfaat bagian tersebut.

15. Latihan

Latihan 1.1

1. Buktikan sifat eksponen nomor 6 dan 7.
2. Tentukan nilai p sedemikian sehingga persamaan berikut ini tepat
   a. $(3^4)^2 = 3^p$ b. $b^p.b^5 = b^9$ c. $(3\pi)^p = 27\pi^3$
3. Sederhanakanlah
   a. $\left(\frac{2^4 \times 3^6}{2^3 \times 3^2}\right)^3$ b. $(3u^3v^5)(9u^4v)$ c. $\left(\frac{n^{-1}r^4}{5n^{-6}r^4}\right)^2$

Siswa mengerjakan soal-soal dengan tiga jenis tingkat kesulitan, yaitu dasar, menengah, dan tinggi. Pertanyaan pada tingkat dasar berupa jawaban pendek yang menguji pemahaman konsep dan keterampilan dasar. Tingkat menengah berupa permasalahan yang lebih terstruktur, sedangkan tingkat tinggi merupakan permasalahan aplikasi dan keterampilan aras tinggi (HOTS).

16. Uji Kompetensi

Uji Kompetensi

1. Selesaikanlah

a. $\left(\frac{x^{-5}y^{4}}{xy^{3}}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{x^{7}y^{-3}}{x^{-4}y^{6}}\right)^{-\frac{1}{2}}$

b. $\frac{(m^{10}n^{-2})^{3}(m^{5}n^{-5})^{3}}{mn}$

Terdapat pada akhir bab, merupakan sarana bagi siswa untuk mengukur pencapaian mereka dalam topik bab. Siswa dapat mengerjakan sejumlah soal yang bervariasi dari yang sederhana hingga yang kompleks. Selain itu, soal dapat berupa hitungan ataupun pemahaman konsep.

17. Materi Pengayaan/Proyek

Materi Pengayaan

1. Buatlah suatu barisan geometri, dengan menentukan suku pertama, rasio, dan banyak suku pada tabel di bawah ini.

Barisan geometri 1.

Suku pertama	....
Rasio	....
Banyak suku	....
... , ... , ... , ... , ..., ...	

Kegiatan yang dapat digunakan untuk memperluas atau memperdalam wawasan dan pemahaman atas konsep matematika yang sedang dipelajari. Materi pengayaan dapat bersifat sebagai pendalaman materi, penerapan dalam bidang teknologi/informatika, atau kegiatan eksplorasi/proyek.

18. Refleksi

Refleksi

Dalam bab ini kalian sudah belajar tentang eksponen dan logaritma serta bagaimana hubungan antara eksponen dan logaritma.

1. Apa itu eksponen dan logaritma?
2. Apa perbedaan dari fungsi pertumbuhan eksponensial dan fungsi penurunan eksponensial? Berikan masing-masing satu contoh.
3. Apa hubungan antara eksponen dan logaritma?
4. Berikan 1 contoh penerapan logaritma dalam kehidupan sehari-hari.

Pada akhir bab atau subbab, siswa akan diajak memikirkan kembali apa yang sudah dipelajari dan seberapa dalam/tepat pemahaman mereka atas pembelajaran pada bagian tersebut.

E. Alternatif Pembelajaran

Dalam Buku Guru ini terdapat saran untuk melakukan diferensiasi pembelajaran (*differentiated instruction*) untuk siswa yang mengalami kesulitan maupun untuk siswa dengan kecepatan belajar yang tinggi (*advanced learner*). Alternatif penggunaan teknologi juga diberikan untuk konteks sekolah di mana siswa tidak memiliki akses teknologi yang dibutuhkan.

Penggunaan Teknologi

Teknologi dapat bermanfaat dalam pembelajaran Matematika. Berikut diberikan beberapa alternatif teknologi yang dapat digunakan. Selain itu, guru juga dapat menggunakan teknologi lain yang dikuasai.

a. Scientific Calculator

Kalkulator jenis ini selain dapat dimanfaatkan untuk menghitung operasi dasar matematika juga dapat dimanfaatkan untuk fungsi-fungsi matematika yang lain, seperti menghitung eksponen dan logaritma, fungsi-fungsi trigonometri, statistika, kombinatorik, vektor, matriks, dan bilangan kompleks. Setiap tipe kalkulator memiliki instruksi spesifik yang dapat dipelajari pada buku manualnya, namun ada beberapa hal yang perlu diingat seperti berikut.

a. Tampilan

Perlu diselidiki bagaimana kalkulator menampilkan bilangan. Contohnya untuk pecahan campuran, ada kalkulator yang menampilkan dalam bentuk $8\frac{1}{2}$ namun ada juga yang menampilkan dalam bentuk 8 ⌟ 1 ⌟ 2. Ada kalkulator yang menampilkan dalam bentuk 5×10^{10} dan ada juga yang menampilkan bilangan yang sama dalam bentuk 5 E 10.

b. Satuan

Untuk fungsi trigonometri, umumnya ada 3 satuan sudut yang dapat dipilih yaitu derajat (deg/D), radian (rad/R), dan gradian (grad/G). Sudut tegak lurus adalah sudut 90^o, π rad, dan 100 grad. Pastikan Anda memilih pengaturan satuan yang tepat.

c. Urutan menekan tombol

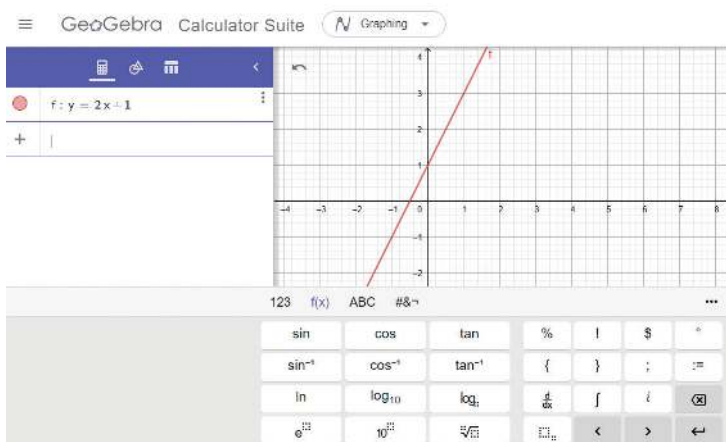
Ada kalkulator yang untuk menghitung e^2 Anda perlu menekan 2 lalu menekan tombol e^x, namun ada jenis kalkulator yang mengharuskan Anda menekan tombol e^x sebelum menekan 2.

d. Ada juga kalkulator yang dapat menampilkan grafik.

e. Banyak HP Android masa kini yang memiliki fungsi *scientific calculator.*

b. GeoGebra

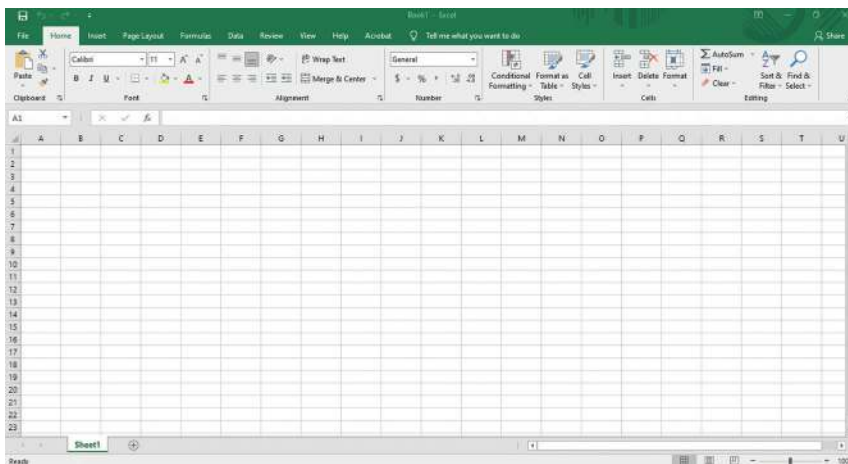
GeoGebra memiliki versi berbasis daring, versi yang dapat digunakan secara luring pada laptop dan juga ada versi Android. *GeoGebra* dapat digunakan untuk menghitung seperti kalkulator, juga dapat digunakan untuk membuat grafik.

Perbedaan utama penggunaan aplikasi dengan kalkulator terletak pada tombol-tombolnya yang merupakan tombol virtual. Untuk menggambarkan grafik, Anda dapat menuliskan fungsinya pada '+'.

c. *Desmos*

Desmos juga memiliki versi berbasis web dan versi yang dapat diunduh pada pada telepon genggam. Ada empat jenis kalkulator yang dapat dipilih dengan *Desmos*.

Matrix Calculator

d. *Microsoft Excel*

Microsoft Excel merupakan aplikasi yang paling umum digunakan dalam menyajikan data dalam bentuk kolom dan baris. Aplikasi ini juga menyediakan fitur pengolahan data dalam bentuk sintaks atau rumus dan penyajian data dalam bentuk tabel, grafik dan diagram.

F. Sistem Penilaian Hasil Belajar

Agar semua siswa dapat mencapai tujuan pembelajaran yang dikehendaki, proses pemantauan dan evaluasi pembelajaran perlu dilakukan secara terus-menerus selama proses pembelajaran (penilaian formatif atau *assessment for learning*) dan di akhir proses pembelajaran (penilaian sumatif atau *assessment of learning*). Siswa juga dilibatkan di dalam proses menilai diri (*assessment as learning*) sehingga mengembangkan kemampuan metakognisi (memonitor proses pembelajaran diri).

Guru dapat melakukan penilaian formatif dan memberikan umpan balik kepada siswa melalui aktivitas Ayo Mencoba dan Latihan. Penilaian sumatif dapat dilakukan melalui Uji kompetensi di akhir bab. Siswa memiliki banyak kesempatan untuk melakukan penilaian diri melalui aktivitas Ayo Berefleksi di berbagai bagian selama proses pembelajaran dan juga Refleksi di bagian akhir dari bab. Materi Pengayaan melalui proyek juga merupakan kesempatan bagi guru untuk menilai pengetahuan, keterampilan, dan juga aspek lain seperti kemampuan kolaborasi dan komunikasi di dalam kerja kelompok.

G. Kegiatan Tindak Lanjut

Guru dapat menindaklanjuti proses dan hasil belajar siswa melalui beberapa cara, antara lain remedial, pengayaan, dan layanan konseling. Pada bagian ini akan dijelaskan secara ringkas pelaksanaan remedial dan pengayaan.

1. Kegiatan Remedial

Siswa yang belum mencapai kriteria ketuntasan belajar berkesempatan untuk memperbaiki hasil belajar melalui kegiatan remedial. Setelah menganalisis hasil penilaian sumatif untuk mengidentifikasi permasalahan kesulitan yang dihadapi oleh siswa, guru dapat dengan tepat menyusun kegiatan pembelajaran dan remedial sesuai dengan kebutuhan siswa. Kegiatan remedial dapat dilakukan dengan cara penugasan, tutorial sebaya, ataupun pengerjaan ulang soal-soal Latihan dan Uji Kompetensi yang telah tersedia di Buku Siswa.

2. Pengayaan

Untuk siswa dengan kecepatan belajar tinggi (*advanced learner*) kegiatan pengayaan dapat diberikan untuk memperdalam dan memperluas kompetensi yang telah dimiliki oleh siswa tersebut. Kegiatan ini dilakukan ketika guru masih memiliki waktu untuk melaksanakan pembelajaran sehingga siswa-siswa yang masuk dalam kategori cepat dapat belajar secara optimal. Kegiatan pengayaan dapat dilakukan dengan berbagai cara, misalnya penugasan, tutorial sebaya, proyek, dan pemecahan masalah. Fitur-fitur dalam Buku Siswa yang dapat digunakan untuk keperluan kegiatan pengayaan antara lain Proyek, Ayo Bekerja Sama, Ayo Berdiskusi, Ayo Berpikir Kritis, dan Ayo Berpikir Kreatif.

H. Interaksi Guru dengan Orang Tua

Keberhasilan pencapaian siswa dalam pembelajaran tidak hanya bergantung pada guru, namun juga melibatkan peran orang tua atau wali siswa. Guru sebaiknya dapat menjalin kerja sama yang baik dengan orang tua atau wali siswa sebagai rekan (partner) dengan cara mengomunikasikan pentingnya matematika dan bahwa semua siswa memiliki kemampuan untuk belajar matematika kepada orang tua sehingga sikap dan persepsi positif terhadap matematika berkesinambungan baik di sekolah maupun di rumah. Guru perlu membuka diri bagi masukan dari orang tua atau wali, khususnya terhadap minat dan kesulitan yang dihadapi siswa sehingga dapat melakukan diferensiasi pembelajaran sesuai dengan kebutuhan siswa. Guru dapat memberikan ide-ide kepada orang tua atau wali dalam mendukung pembelajaran putra/putrinya, misalnya bagaimana orang tua dapat menyiapkan lingkungan belajar yang kondusif, memberikan dorongan semangat kepada putra/putrinya ketika mereka belum berhasil dalam pembelajaran, maupun memuji keberhasilan sekecil apapun yang ditunjukkan oleh putra/putrinya. Selain itu, guru sebaiknya juga mengomunikasikan sistem atau metode pembelajaran matematika yang digunakan di sekolah kepada orang tua, khususnya jika pendekatan tersebut baru bagi orang tua, misalnya pendekatan *Flipped Classroom*. Hal ini perlu dilakukan untuk menghindari mispersepsi dari orang tua bahwa guru "tidak

mengajarkan apa-apa", padahal metode tersebut menuntut siswa untuk belajar secara mandiri di rumah. Penyamaan persepsi penting sehingga proses pembelajaran boleh didukung juga dari pihak orang tua.

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2021

**Buku Panduan Guru Matematika untuk SMA/SMK
Kelas XI**

Penulis: Dicky Susanto, dkk.

ISBN: 978-602-244-789-4 (jil.2)

Bab

1

Komposisi Fungsi dan Fungsi Invers

Pengalaman Belajar

Setelah mempelajari bab ini, siswa dapat:

1. Menjelaskan pengertian fungsi.
2. Menentukan domain, kodomain, dan *range* dari suatu fungsi.
3. Menjelaskan syarat dan aturan komposisi fungsi.
4. Membuat komposisi fungsi yang terdiri atas dua atau lebih fungsi.
5. Menggunakan konsep komposisi fungsi untuk menyelesaikan masalah.
6. Menyelidiki sifat komutatif dan sifat asosiatif pada komposisi fungsi.
7. Menjelaskan syarat dan aturan pembuatan fungsi *invers.*
8. Menggunakan konsep fungsi *invers* untuk menyelesaikan masalah.

Gambaran Umum Bab

Bab ini bertujuan mengembangkan kemampuan siswa untuk memahami dan bernalar mengenai komposisi fungsi dan fungsi *invers* serta dapat menerapkannya dalam penyelesaian masalah dunia nyata. Sebelumnya, siswa mengerti fungsi berdasarkan makna relasi dan menyadari bahwa fungsi merupakan hal penting dalam kehidupan sehari-hari. Konsep domain, kodomain, dan *range* juga dipahami melalui konteks dunia nyata sehingga memudahkan untuk menyelesaikan soal-soal yang bersifat abstrak. Siswa juga memahami bahwa operasi matematika berupa penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian dapat dilakukan pada dua atau lebih fungsi yang akan menghasilkan fungsi yang baru. Penggabungan dua atau lebih fungsi ini juga ditemui dalam kehidupan sehari-hari seperti fungsi keuntungan sebagai pengurangan fungsi pendapatan dengan fungsi biaya atau fungsi jarak henti total sebagai penjumlahan fungsi jarak henti karena waktu reaksi dan pengereman. Komposisi fungsi merupakan operasi fungsi dalam fungsi seperti menghitung biaya pemakaian bahan bakar yang berkaitan dengan jarak tempuh. Biaya bahan bakar bergantung pada volume atau banyak bahan bakar yang dibeli, sedangkan jarak tempuh ditentukan oleh pemakaian bahan bakar. Jelaslah bahwa masalah sehari-hari dapat dimodelkan dan diselesaikan dengan komposisi fungsi. Komposisi fungsi dibuat berdasarkan suatu syarat. Komposisi fungsi memenuhi sifat asosiatif. Fungsi *invers* dipahami dalam konteks nyata dan siswa memahami syarat dan sifat fungsi *invers*. Siswa memahami bagaimana menyelesaikan fungsi *invers* jika suatu fungsi diketahui.

Pada subbab A, siswa melakukan beberapa eksplorasi untuk menentukan domain, kodomain, dan *range* dari suatu fungsi dalam konteks nyata dan juga secara abstrak. Pada subbab B, siswa melakukan beberapa eksplorasi untuk menentukan gabungan fungsi dan komposisi fungsi dengan konteks kehidupan sehari-hari. Siswa juga mengeksplorasi syarat dan sifat-sifat pembentukan komposisi fungsi. Pada subbab C, siswa melakukan eksplorasi untuk menentukan fungsi *invers* dan menyelesaikan masalah sehari-hari yang berkaitan dengan fungsi *invers*. Siswa juga menentukan syarat terbentuknya fungsi *invers*.

Pemahaman bab ini terkait dengan topik fungsi eksponensial dan fungsi kuadrat yang dipelajari di kelas X. Bab ini juga terkait dengan mata pelajaran Fisika, Kimia, dan Ekonomi.

Skema Pembelajaran

Subbab	Waktu (JP)*	Tujuan	Pokok Materi	Kosakata	Metode dan Aktivitas
A. Pengertian Fungsi	8 JP	• Menjelaskan pengertian fungsi. • Menentukan domain, kodomain, dan *range* dari fungsi.	Relasi Domain, kodomain, dan *range*	Relasi, domain, kodomain, *range*	Pembelajaran Penemuan
B. Komposisi Fungsi	14 JP	• Menjelaskan syarat dan aturan komposisi fungsi. • Membuat komposisi fungsi yang terdiri atas dua atau lebih fungsi. • Menyelidiki sifat komutatif dan asosiatif pada komposisi fungsi. • Menggunakan komposisi fungsi untuk menyelesaikan masalah.	• Operasi fungsi. • Komposisi fungsi.	Komposisi fungsi	Pembelajaran Penemuan

Subbab	Waktu (JP)*	Tujuan	Pokok Materi	Kosakata	Metode dan Aktivitas
C. Fungsi Invers	12 JP	• Menjelaskan syarat dan aturan pembuatan fungsi *invers* • Menggunakan fungsi *invers* untuk menyelesaikan masalah	• Fungsi Invers • Fungsi *invers* dari komposisi fungsi	Fungsi *invers*	Pembelajaran Penemuan

Catatan:

Guru dapat menyesuaikan rentang jam pelajaran dengan kondisi aktual pembelajaran.

Panduan Pembelajaran

A. Fungsi

1. Menjelaskan pengertian fungsi
2. Menentukan domain, kodomain, dan *range* dari suatu fungsi

1. Aplikasi Geogebra
2. Aplikasi Microsoft Excel
3. Penggaris
4. Kertas berpetak
5. Alat tulis

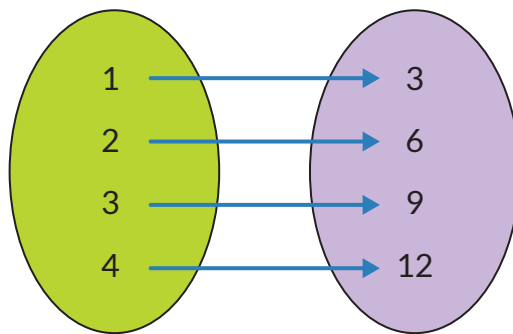
Perkenalkan bab ini dengan PENGANTAR BAB dan diskusikan contoh biaya sebagai fungsi dari jumlah bahan bakar dan jarak tempuh sebagai fungsi dari bahan bakar. Tanyakan, "*Apakah keduanya merupakan fungsi*?" untuk mengecek pemahaman siswa tentang fungsi. (Ya, keduanya merupakan fungsi). Guru bertanya lanjut, "*Apa perbedaan fungsi linear, fungsi kuadrat dan fungsi eksponensial? Berikan contoh.*" (Untuk fungsi linear, jika x naik 3 kali maka nilai fungsi juga naik 3 kali. Untuk fungsi eksponensial, jika x naik 3 kali maka kenaikan nilai fungsi bergantung pada bentuk eksponensial.)

Tanyakan lanjut,

- Fenomena atau masalah apa yang memerlukan penerapan fungsi linear?
- Fenomena atau masalah apa yang memerlukan penerapan fungsi kuadrat?
- Fenomena atau masalah apa yang memerlukan penerapan fungsi eksponensial?

Guru menjelaskan peta konsep untuk menunjukkan materi belajar yang akan didiskusikan.

Gunakan bagian **Mengingat Kembali** mengenai relasi sebagai pengantar pemahaman pada fungsi. Guru meninjau kembali pemahaman siswa tentang relasi dengan memberikan satu contoh.

Guru memberikan soal dibawah ini dan meminta siswa menyatakan relasi dalam pasangan berurutan dan diagram Kartesius.

Jika diperlukan, berikan soal-soal yang lain dan variasikan bentuk soalnya. Misalnya, berikan diagram Kartesius dan tanyakan pasangan berurutan dan diagram panah.

Mulai aktivitas pembelajaran dengan meminta siswa mendiskusikan pengantar bab yang membahas relasi antara jumlah bahan bakar dan harga yang harus dibayar. Jumlah bahan bakar merupakan masukan (*input*) dan harga yang harus dibayar merupakan keluaran (*output*). Untuk relasi jumlah bahan bakar dan jarak tempuh tanyakan apa yang merupakan *input* dan apa yang merupakan *output*. Tegaskan bahwa fungsi memiliki variabel bebas (masukan/*input*) dan variabel terikat (keluaran/*output*). Minta siswa memberikan contoh-contoh relasi sehari-hari yang menunjukkan keterkaitan antara kedua variabel ini.

Diskusikan juga bahwa funsi dapat dinyatakan sebagai mesin yang menghubungkan masukan dan keluaran (lihat gambar 1.4).

Pemahaman masukan dan keluaran menolong siswa untuk memahami domain, kodomain, dan *range* dengan lebih baik. Domain, kodomain, dan *range* akan dipelajari lebih dalam Eksplorasi 1.1

Dalam subbab ini pengertian relasi dan fungsi ditinjau kembali. Minta siswa mengamati Gambar 1.5 dan 1.6 untuk memahami relasi yang merupakan fungsi dan bukan fungsi. Minta siswa memberikan contoh-contoh relasi bukan aljabar yang menunjukkan fungsi selain nama pemain dan nomor punggung.

Pertanyaan-pertanyaan yang dapat diberikan adalah sebagai berikut, "*Apakah relasi antara alamat email dan seorang siswa merupakan fungsi? Apakah setiap siswa hanya mempunyai satu alamat email? Apakah mungkin dua siswa mempunyai alamat email yang sama? Apakah mungkin seorang siswa mempunyai lebih dari satu alamat email?*"

Untuk relasi fungsi yang berbentuk aljabar minta siswa memberikan contoh fungsi kuadrat seperti $f(x) = x^2 - 2x + 1$. Minta siswa memberikan contoh fungsi linear dan aplikasinya dalam hidup sehari-hari.

Latih siswa dengan berbagai bentuk relasi dalam himpunan pasangan berurutan, diagram panah, dan diagram Kartesius untuk menentukan apakah relasi tersebut sebagai fungsi dan bukan fungsi.

a. $\{(-2,5),(-1,5),(1,4),(1,6),(2,4),(3,3)\}$ bukan merupakan fungsi karena ada anggota himpunan *input* yang mempunyai lebih dari satu anggota himpunan *output*.
b. $\{(1,3),(2,3),(3,4),(4,4)\}$ merupakan fungsi karena tiap satu anggota himpunan *input* mempunyai tepat satu anggota himpunan *output*.

Selanjutnya, perkenalkan siswa dengan **tes garis vertikal** untuk menentukan apakah suatu grafik berupa fungsi atau tidak. Berikan contoh-contoh grafik lainnya dan minta siswa untuk menggunakan tes garis vertikal.

Miskonsepsi

Siswa dapat beranggapan bahwa fungsi hanya boleh memetakan satu anggota saja dari suatu himpunan yang memuat masukan ke satu anggota dari himpunan yang memuat keluaran. Siswa juga beranggapan bahwa setiap grafik pasti merupakan fungsi. Ketika mengerjakan soal-soal Latihan 1.1 akan tampak pemahaman siswa.

Diferensiasi

Pastikan siswa dapat memahami fungsi sebagai relasi yang menghubungkan masukan dan keluaran, khususnya dalam kehidupan sehari-hari. Fungsi berperan sangat penting dalam kehidupan sehari-hari. Bagi siswa yang mengalami kesulitan mengidentifikasi relasi yang bukan fungsi dan fungsi, perlu diberikan lebih banyak contoh lagi. Minta siswa mengerjakan soal-soal yang menggunakan tes garis vertikal untuk menyelesaikannya.

Bagi siswa dengan kecepatan belajar tinggi (*advanced*), minta mereka membuat pertanyaan-pertanyaan tambahan untuk dijawab baik sendiri maupun dari teman dengan kecepatan belajar tinggi. Mereka dapat ditantang untuk membuat grafik yang menunjukkan fungsi dan bukan fungsi dengan menggunakan *Geogebra*. Minta mereka juga mencatat jika ada pertanyaan yang tidak dapat mereka jawab dengan informasi yang ada.

Kunci Jawaban Latihan 1.1

1. a. merupakan fungsi

   b. merupakan fungsi
2. Ya merupakan fungsi karena setiap anggota di daerah *input* mempunyai tepat satu pasangan di daerah *output*.
3. Penjualan laptop pada tahun 2007 adalah 3^8
4. Relasi yang merupakan fungsi adalah b.

Ayo Bekerja Sama

Relasi yang bukan fungsi dapat dibuat menjadi fungsi. Bagaimana kalian melakukan hal tersebut? (Dengan membatasi *input* grafik agar tidak memotong grafik pada dua titik).

Gunakan salah satu contoh soal dalam Latihan 1.1 no. 4 untuk mengubah relasi bukan fungsi menjadi fungsi.

Metode & Aktivitas Pembelajaran

Setelah peninjauan kembali relasi dan fungsi, minta siswa melakukan eksplorasi 1.1. Eksplorasi ini mengenai domain, kodomain, dan *range*. Selain kertas berpetak, mereka juga dapat menggunakan aplikasi *Geogebra* atau *Microsoft Exce*l untuk menggambar fungsi.

Siswa dapat melakukan kedua eksplorasi secara individu terlebih dahulu kemudian diskusi secara berpasangan atau dalam kelompok, atau langsung bekerja sama berpasangan atau dalam kelompok.

Pada bagian eksplorasi, biarkan siswa mencoba dan tidak dituntut pasti mendapatkan jawabannya. Tujuannya adalah supaya mereka memperdalam pemahaman domain, kodomain, dan *range* dalam konteks kehidupan sehari-hari dan juga menyelesaikan secara aljabar.

Ayo Bereksplorasi

Eksplorasi 1.1

Sebelum memulai eksplorasi 1.1 guru memastikan siswa memahami pengertian domain, kodomain, dan *range* serta penulisan notasi himpunan.

Masalah Pertama

Guru meminta siswa memperhatikan titik-titik dalam grafik 1.9 dengan saksama. Guru memulai dengan bertanya, "*Apakah yang ingin dijelaskan oleh grafik ini?*" dan meminta siswa berdiskusi dalam kelompok. (Grafik menggambarkan hubungan antara kecepatan pelari dengan waktu. Kecepatan

pelari pada suatu waktu tertentu dinyatakan oleh suatu titik. Ada waktu-waktu tertentu yang menunjukkan dengan kecepatan yang sama).

Setelah eksplorasi maka beberapa kelompok memberikan hasil eksplorasinya.

a. Tabel Kecepatan Terhadap Waktu

Waktu (s)	Kecepatan (m/s)
0	0
1	2
2	4
3	8
4	10
5	12
6	12
7	12
8	12
9	11
10	9

b. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

c. $\{0, 2, 4, 8, 9, 10, 11, 12\}$

Setelah diskusi kelompok dan kelas, guru dapat menyimpulkan hasil temuan, yaitu

- grafik memberikan informasi suatu keadaan
- informasi dalam bentuk masukan dan keluaran yang diberikan oleh grafik menunjukkan relasi

Guru mengulang penulisan himpunan jika ada yang belum paham.

Masalah Kedua

Guru meminta seorang siswa membacakan masalah kedua ini. Guru memastikan semua siswa sudah memahami konteks permasalahannya dengan cara meminta beberapa siswa menjelaskan kembali konteks atau menggunakan strategi *Think-Pair-Share*, yaitu setiap siswa diminta untuk

membaca dan memahami masalah, kemudian berpasangan dan secara bergiliran menjelaskan masalahnya, kemudian guru meminta beberapa pasang untuk menjelaskan masalah kepada seluruh kelas.

Tahap ini penting dilakukan untuk membiasakan siswa membaca masalah secara teliti, dan memahami apa yang menjadi inti permasalahan, dan memilah informasi apa yang penting dan relevan. Strategi ini juga melatih kemampuan literasi membaca dari siswa.

Setelah eksplorasi beberapa siswa menyampaikan hasil dan alsannya.

Perhatian:

Bagian yang kosong dalam tabel memang dilengkapi oleh siswa.

1. Melengkapi tabel.

Jumlah potong tempe (*input*)	Jumlah Keripik yang dihasilkan
200	1200
200,25	1200
500,75	3000
...	
600	3600
601	0 (karena mesin berhenti)

2. $\{x \mid 200 \leq x \leq 600, x \in R\}$
3. $\{y \mid 1200 \leq y \leq 3600, y \in R\}$
4. $\{y \mid 1200 \leq y \leq 3600, y \in Z^{+}\}$ dimana Z^{+} merupakan bilangan bulat positif
5. *Range* selalu menjadi subhimpunan dari kodomain.

Setelah diskusi kelompok dan kelas, guru dapat menyimpulkan hasil temuan, yaitu

- pengertian domain, kodomain dan *range* terlihat jelas dalam konteks nyata
- penulisan *range* yang tepat

Guru menggunakan penjelasan gambar 1.11 dan 1.12 untuk memantapkan pengertian domain dan *range* dan penulisannya dalam notasi himpunan.

Berikan lagi satu contoh jika ada yang belum paham untuk menentukan domain, kodomain dan *range* serta penulisannya dalam notasi himpunan.

Siswa menjelaskan pengertian domain dan *range* dengan kata-kata sendiri.

Guru meminta siswa memperhatikan gambar 1.13 untuk menjelaskan pengertiannya.

Kalian sudah memahami penggunaan domain, kodomain dan *range* dalam kehidupan sehari-hari. Berikan contoh lain dalam kehidupan nyata yang membedakan pengertian kodomain dan *range*.

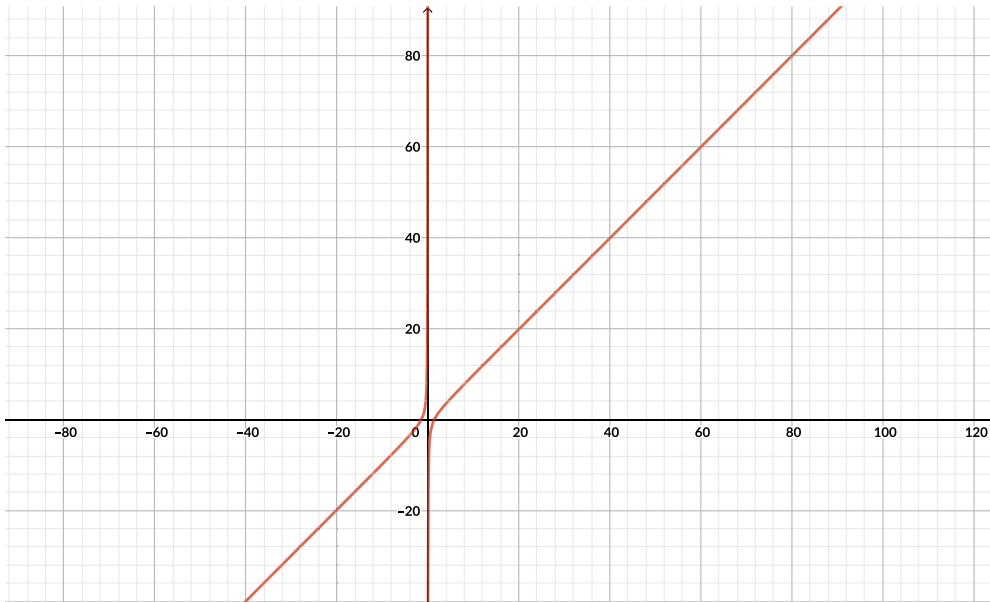
Contoh adalah relasi antara harga barang dengan jumlah barang dalam satuan.

Masalah Ketiga

Pada eksplorasi bagian ketiga ini siswa perlu paham bagaimana fungsi terdefinisi. Grafik sangat menolong untuk menentukan fungsi terdefinisi.

Perhatikan dua grafik dalam gambar 1.14.

a. Grafik fungsi akar.
   1) Kita tahu bahwa karena adanya akar kuadrat, kedua fungsi masing-masing hanya mengambil *input* $x \geq 0$ dan $x - 1 \geq 0$. Jadi domain dari masing-masing fungsi ialah semua bilangan riil non negatif (untuk fungsi pertama) dan semua bilangan riil lebih dari sama dengan 1 (untuk fungsi kedua).
   2) $\{x \mid x \geq 0, x \in R\}$, $\{x \mid x \geq 1, x \in R\}$.

b. Fungsi $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x}$ memiliki domain yang ditentukan oleh pembaginya. Dalam hal ini pembaginya ialah semua nilai x riil dan bukan 0. Range adalah semua bilangan riil. Hal ini bisa dilihat dari grafik di bawah ini:

Setelah diskusi kelompok dan kelas, guru dapat menyimpulkan hasil temuan, yaitu

- pentingnya memahami fungsi terdefinisi
- penulisan domain dan *range* yang tepat.

Guru menekankan bahwa penentuan domain dan *range* suatu fungsi berkaitan dengan konteksnya. Contoh, biaya pembuatan kue diberikan oleh $B(x) = 40000 + 10x$ dengan x adalah jumlah kue. Jika digambarkan maka fungsi ini berupa garis lurus dan domainnya adalah $x > 0$ dengan x merupakan bilangan bulat. Rangenya juga merupakan bilangan bulat. Minta siswa menemukan contoh-contoh lain yang menunjukkan konteks untuk menentukan domain, kodomain dan *range*.

Guru dapat memberikan contoh-contoh lain untuk menentukan domain dan *range* dari fungsi eksponensial dan fungsi kuadrat. Gunakan grafik terlebih dahulu dilanjutkan dengan bentuk aljabar fungsi.

Miskonsepsi

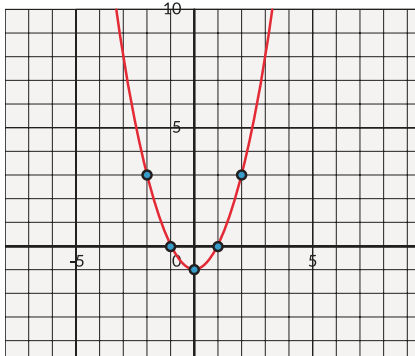
Siswa dapat beranggapan bahwa fungsi hanya boleh memetakan satu anggota saja dari domain ke satu anggota dari kodomain. Siswa juga beranggapan bahwa kodomain sama dengan *range*.

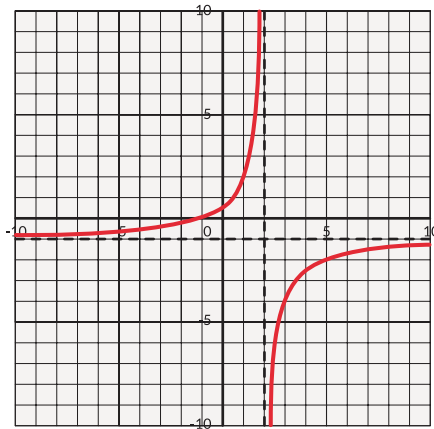
Diferensiasi

Bagi siswa yang mengalami kesulitan memahami domain, kodomain dan *range* berikan lagi contoh dalam bentuk aljabar maupun grafik. Pastikan mereka memahami fungsi yang terdefinisi sehingga mereka dapat menentukan domain, kodomain dan *range*. Grafik sangat menolong dalam menentukan kodomain, domain dan *range*. Buatlah latihan untuk menentukan domain, kodomain dan *range* dari pembagian fungsi linear dengan fungsi linear atau fungsi linear dengan fungsi kuadrat atau sebaliknya.

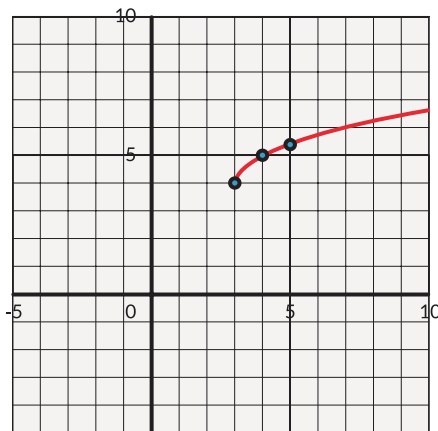
Bagi siswa dengan kecepatan belajar tinggi (*advanced*), minta mereka membuat pertanyaan-pertanyaan tambahan untuk dijawab baik sendiri maupun dari teman dengan kecepatan belajar tinggi. Mereka dapat ditantang untuk membuat grafik dengan menggunakan *geogebra* dan sekalian menentukan domain dan *range*. Minta mereka juga mencatat jika ada pertanyaan yang tidak dapat mereka jawab dengan informasi yang ada.

Kunci Jawaban Latihan 1.2

1. Gunakan *geogebra* untuk menggambar grafik jika memungkinkan.

Grafik dari $f(x) = x^2 - 1$

Domain: $(-\infty, \infty)$, Range: $[-1, \infty)$.

Grafik dari $f(x) = \dfrac{x+1}{2-x}$.

Domain: $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$,

Range: $(-\infty, \infty)$.

Grafik dari $f(x) = \sqrt{(x-3)} + 4$

Domain: $[3, \infty)$, Range: $[4, \infty)$.

2. a. Domain: [-1,10]

   Range: [-2,5]

b. Domain: Semua bilangan riil $(-\infty, \infty)$

Range: $(-\infty, 2]$

c. Domain: [-2,2]

Range (-3, 3,2)

3. a) Jawaban bisa bervariasi

   Contoh domain tidak bisa berharga negatif adalah jumlah barang, jumlah uang, berat badan dan umur.

   b) Jawaban bisa bervariasi

   Contoh *range* tidak bisa berharga negatif adalah jumlah Barang, jumlah uang, berat badan dan umur.

4. a. $K = C + 273$. Variabel K bisa diganti dengan variabel y dan C bisa diganti dengan variabel x.

   b. Dengan pengetahuan tentang *absolute zero* (suhu mutlak), bisa disimpulkan bahwa Domain: $[-273, \infty)$, Range: $[0, \infty)$.

5. Domain: $[0, \infty)$

   Range: [20.000.000,00, 0]

   Harga setelah 5 tahun berkisar: Rp. 5.730.000,00.

6. a. Domain [0, 30000] dan *range* [0, 100].

   b.Tekanan udara selalu bernilai positif.

7. a. Domain [1000, 30000] dan *range* [-47,5, 55]

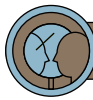
   b. Suhu bernilai negatif.

8. Fungsi linear $f(x) = 2x + 3$ diplot dalam grafik dengan batasan $0 \leq x \leq 10$ dan .$3 \leq y \leq 23$.

Rangkuman

Di akhir dari pembelajaran Bagian A. Fungsi, guru merangkum apa yang sudah dipelajari, yaitu:

- Ada relasi berupa fungsi dan ada relasi yang bukan fungsi.
- Tes vertikal digunakan untuk menentukan apakah suatu grafik adalah fungsi atau bukan fungsi.

- Menentukan domain, kodomain dan *range* perlu memerhatikan konteks permasalahan dan bentuk fungsi.

Ajak siswa untuk refleksi diri dengan menjawab pertanyaan-pertanyaan berikut. Siswa dapat menuliskannya dalam buku jurnal refleksi dan minta mereka memberikan bukti atau contoh pemahaman mereka.

1. Apakah saya sudah dapat membedakan fungsi dengan bukan fungsi dalam beberapa cara representasi?
2. Apakah saya dapat menentukan domain, kodomain dan *range* dari suatu fungsi?

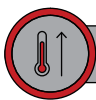
B. Komposisi Fungsi

- Menjelaskan syarat dan aturan komposisi fungsi
- Membuat komposisi fungsi yang terdiri atas dua atau lebih fungsi
- Menggunakan konsep komposisi fungsi untuk menyelesaikan masalah
- Menyelidiki sifat komutatif dan sifat asosiatif pada komposisi fungsi

- Aplikasi *Geogebra*
- Aplikasi *Microsoft Excel*
- Penggaris
- Kertas berpetak
- Alat tulis

Perkenalkan subbab ini dengan mendiskusikan sebagaimana bilangan bulat dapat dijumlahkan, dikurangkan, dikalikan dan dibagi, maka fungsi dapat

dijumlahkan, dikurangkan, dikalikan dan dibagi. Contoh, operasi pada 5 dan 9, yaitu 5+9, 5−9, 5×9, 5÷9. Bagaimana melakukan operasi pada fungsi? Siswa diminta melakukan eksplorasi 1.2. untuk memahami hal ini. Operasi fungsi ditemukan dalam kehidupan sehari-hari.

Komposisi fungsi, berbeda dengan operasi penjumlahan atau pengurangan atau operasi perkalian atau operasi pembagian, merupakan bentuk operasi hasil suatu fungsi pada fungsi lainnya. Eksplorasi 1.3, 1.4 dan 1.5 berkaitan dengan syarat dan sifat komposisi fungsi. Komposisi fungsi ditemukan dalam kehidupan sehari-hari.

Mulai aktivitas pembelajaran dengan mendiskusikan operasi matematika pada dua atau lebih bilangan. Tanyakan apakah mungkin dua fungsi dijumlahkan, dikurangkan, dikali dan dibagi seperti operasi matematika pada bilangan. Minta para siswa mendiskusikannya

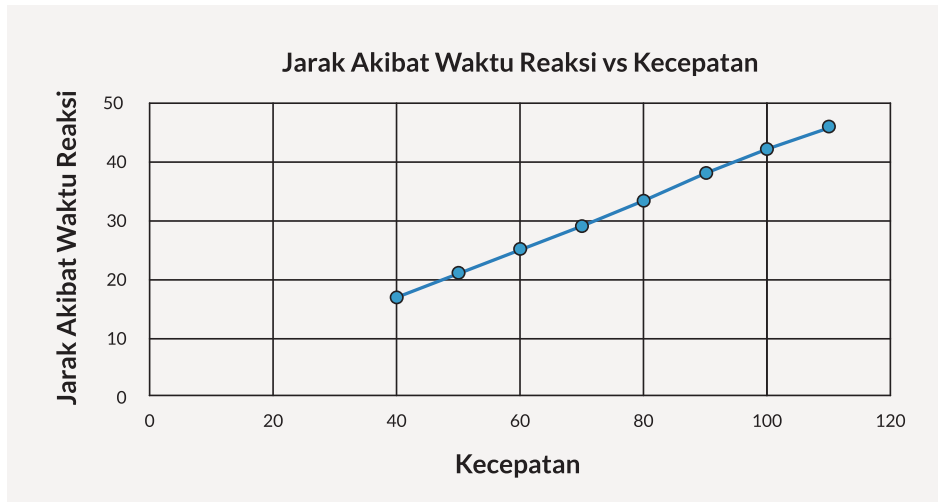
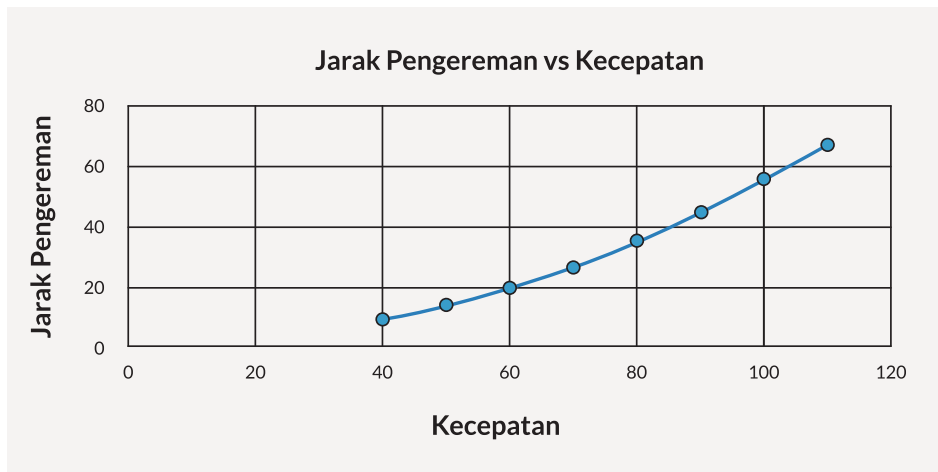
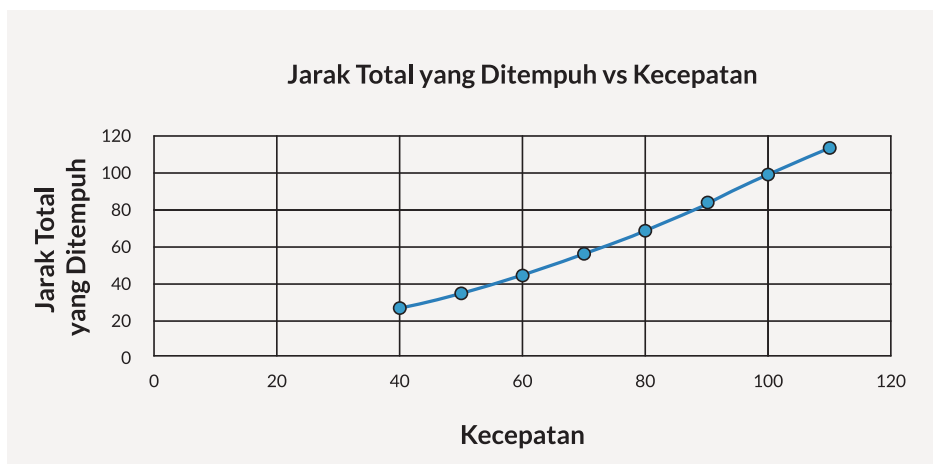
Setelah diskusi, minta siswa melakukan eksplorasi 1.2 yang melibatkan perjumlahan dua fungsi. Selain kertas berpetak, mereka juga dapat menggunakan aplikasi *geogebra* atau *microsoft excel* untuk menggambar grafik fungsi.

Siswa dapat melakukan kedua eksplorasi secara individu terlebih dahulu kemudian diskusi secara berpasangan atau dalam kelompok, atau langsung bekerja sama berpasangan atau dalam kelompok.

Pada bagian eksplorasi, biarkan siswa mencoba dan tidak dituntut pasti mendapatkan jawabannya. Tujuannya adalah supaya mereka memahami apa yang dimaksud dengan operasi fungsi dan kegunaannya dalam kehidupan sehari-hari.

Eksplorasi 1.2

Kunci jawaban diberikan di bawah ini:

a.

b.

c.

d. Grafik yang diperoleh pada bagian c tepat sama dengan grafik yang diperoleh dari bagian a+b.

e. Domain pada grafik c adalah $\{40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110\}$ sama dengan domain pada grafik a+b. Range-nya ialah $\{26, 35, 45, 56, 69, 83, 98, 113\}$ yang juga sama dengan *range* pada grafik a+b.

Tanyakan siswa bagaimana menentukan domain dan *range* dari penjumlahan kedua fungsi.

1. Penjumlahan dan Pengurangan Fungsi

Eksplorasi 1.2 menggiring pada pembahasan penjumlahan dan pengurangan fungsi.

Kaitkan hasil eksplorasi siswa dengan pemahaman bagaimana menjumlahkan dua atau lebih fungsi. Ajak mereka berpikir apa bentuk fungsi yang dihasilkan setelah dua fungsi dijumlahkan. Berikan beberapa gambar fungsi, misalnya fungsi linear dengan fungsi linear, fungsi linear dengan fungsi kuadrat, fungsi kuadrat dengan fungsi kuadrat, fungsi eksponensial dengan fungsi eksponensial. Tanyakan lagi bentuk fungsi yang dihasilkan jika kedua fungsi dikurangkan. Diskusikan bersama apakah ada hal umum yang sama

mengenai bentuk fungsi yang dihasilkan jika dua fungsi dijumlahkan atau dikurangkan.

Jika dua fungsi linear dijumlahkan atau dikurangkan maka akan menghasilkan fungsi linear atau fungsi konstan. Jika fungsi linear dijumlahkan atau dikurangkan dengan fungsi kuadrat maka akan menghasilkan fungsi kuadrat. Jika dua fungsi kuadrat dijumlahkan dan dikurangkan maka akan menghasilkan fungsi kuadrat atau fungsi linear atau fungsi konstan.

Berikan contoh-contoh nyata tentang pengurangan dan penjumlahan dua fungsi dalam kehidupan sehari-hari.

Diskusikan domain dan *range* dari penjumlahan dan pengurangan fungsi dengan meminta siswa memahami penjelasan dalam buku siswa. Domain fungsi gabungan merupakan irisan dari domain kedua fungsi. Untuk memahami hal ini berikan beberapa soal penjumlahan dan pengurangan fungsi berdasarkan grafik fungsi dan minta siswa menemukan domain fungsi gabungan.

a. Fungsi keuntungan adalah fungsi pendapatan dikurangi dengan fungsi biaya produksi.
b. Tabel keuntungan sebagai fungsi dari jumlah barang yang diproduksi.

Jumlah Barang	Pendapatan	Biaya Produksi	Keuntungan
0	0	4000	-4000
200	2500	5000	-2500
400	5000	6000	-1000
520	5600	5600	0
600	7500	7000	500
1000	7200	11600	4400

Domain (0, 1000]

Range [-4000, 4400]

c. Grafik dapat dibuat dengan *Microsoft Excel* atau *Geogebra.*

Tahukah Kamu?

Guru meminta siswa memperhatikan penjumlahan dua simpangan gelombang yang dapat menghasilkan simpangan gelombang lebih besar atau lebih kecil.

Diferensiasi

Bagi siswa yang mengalami kesulitan memahami penjumlahan dan pengurangan fungsi beserta penentuan domain dan *range*nya berikan bentuk grafik terlebih dahulu.

Bagi siswa dengan kecepatan belajar tinggi (*advanced*), minta mereka membuat pertanyaan-pertanyaan tambahan untuk dijawab baik sendiri maupun dari teman dengan kecepatan belajar tinggi. Minta mereka juga mencatat jika ada pertanyaan yang tidak dapat mereka jawab dengan informasi yang ada.

2. Perkalian dan Pembagian Fungsi

Metode & Aktivitas Pembelajaran

Lanjutkan dengan mendiskusikan perkalian dan pembagian dua fungsi sebagaimana yang ada di dalam buku siswa. Berikan contoh-contoh yang nyata dari perkalian dan pembagian dua fungsi. Dalam situasi nyata apa dua fungsi dikalikan dan dibagikan?

Diskusikan dengan siswa bentuk fungsi yang dihasilkan dari dua fungsi yang dikalikan dan dibagi. Misalnya fungsi linear dengan fungsi linear, fungsi linear dengan fungsi kuadrat, fungsi kuadrat dengan fungsi kuadrat, fungsi eksponensial dengan fungsi eksponensial. Misalnya, perkalian dua fungsi linier akan menghasilkan fungsi kuadrat. Perkalian dua fungsi eksponensial akan menghasilkan fungsi eksponensial juga.

Diskusikan juga domain dan *range* dari hasil perkalian dan pembagian fungsi.

Diferensiasi

Bagi siswa yang mengalami kesulitan memahami perkalian dan pembagian fungsi beserta penentuan domain dan *range*nya perlu lebih banyak latihan.

Bagi siswa dengan kecepatan belajar tinggi (*advanced*), minta mereka membuat pertanyaan-pertanyaan tambahan untuk dijawab baik sendiri maupun dari teman dengan kecepatan belajar tinggi. Minta mereka juga mencatat jika ada pertanyaan yang tidak dapat mereka jawab dengan informasi yang ada.

Kunci Jawaban Latihan 1.3

1. Jika $f(x) = \sqrt{(x+3)}$ dan $g(x) = x+3$

   a. Tentukan $f(x)+g(x)$!

   $$f(x)+g(x) = \sqrt{(x+3)} + x + 3$$

   b. Tentukan domain dan *range* dari $f(x)+g(x)$!

   Domain:

   $D_f : \{x \mid x \geq -3, x \in \mathbb{R}\}$

   $D_g : \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

   $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{x \mid x \geq -3, x \in \mathbb{R}\}$

   Range:

   $R_{f+g} = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

2. $f(x) = x^2 + 2$ dan $g(x) = 2x - 5$

   a. Tentukan $f(x)-g(x)$!

   $$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= x^2 + 2 - (2x-5) \\ &= x^2 + 2 - 2x + 5 \\ &= x^2 - 2x + 7 \end{aligned}$$

b. Tentukan domain dan *range* dari $f(x)-g(x)$!

$$D_f : \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$$
$$D_g : \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$$
$$D_{(f-g)} = D_f \cap D_g = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Nilai minimum fungsi kuadrat $y = x^2 - 2x + 7$ yakni

$$\begin{aligned} y_{\min} &= -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ &= -\frac{(-2)^2 - 4(1)(7)}{4(1)} \\ &= -\frac{-24}{4} \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$R_{(f-g)} = \{x \mid x \geq 6, x \in \mathbb{R}\}$$

3. Contoh: $2^x + x^2$ dan $2^x - x^2$
4. a. 4 + 5 = 9

   b. 2 − 4 = −2

   c. 2 × 6 = 12

   d. 0/7 = 0
5. Keuntungan adalah $R(x) - C(x) = -20x^2 + 900x - 8000$
6. a. 7 + 6 = 13

   b. 7 - 6 = 1

   c. 7 × 6 = 42

   d. 7/6
7. Siswa memberikan contoh nyata perkalian dua fungsi dalam kehidupan sehari-hari seperti dimensi dari kolam berenang.
8. Siswa memberikan contoh nyata pembagian dua fungsi dalam kehidupan sehari-hari.

3. Komposisi Fungsi

Mulai aktivitas pembelajaran dengan mendiskusikan bagaimana membangun komposisi fungsi jika diberikan dua fungsi dengan suatu variabel. Berikan contoh sederhana berupa komposisi dua fungsi linear. Kedua fungsi linear menggambarkan contoh nyata dalam kehidupan sehari-hari. Misalkan, 1 kg kedelai menghasilkan 8 bungkus tempe. Delapan bungkus tempe menghasilkan 10 keripik tempe. Jadi, banyak keripik tempe ditentukan oleh banyak kedelai karena banyak kedelai menentukan banyak bungkus tempe. Bungkus tempe merupakan fungsi dari kedelai, $B(k) = 8\ k$. Keripik tempe merupakan fungsi dari bungkus tempe, $K(B) = 10\ B$. Tanyakan, "Jika keduanya dikomposisikan bagaimana menyatakan banyak keripik tempe sebagai fungsi dari kedelai?" Diskusikan.

Gunakan kembali diagram panah dan mesin fungsi untuk memperkuat pemahaman komposisi fungsi, berikan contoh pembuatan keripik tempe. Siswa juga boleh menggunakan cara lain dalam memahami komposisi fungsi selain diagram panah dan mesin fungsi, misalnya tabel.

Setelah diskusi, minta siswa melakukan Eksplorasi 1.3 yang menyangkut komposisi fungsi. Siswa menyelesaikan dua masalah yang berkaitan dengan membangun komposisi fungsi dari dua fungsi.

Siswa dapat melakukan kedua eksplorasi secara individu terlebih dahulu kemudian diskusi secara berpasangan atau dalam kelompok, atau langsung bekerja sama berpasangan atau dalam kelompok.

Pada bagian eksplorasi, biarkan siswa mencoba dan tidak dituntut pasti mendapatkan jawabannya. Tujuannya adalah supaya mereka memahami apa yang dimaksud dengan komposisi fungsi dan kegunaannya dalam kehidupan sehari-hari.

Kunci jawaban Eksplorasi 1.3

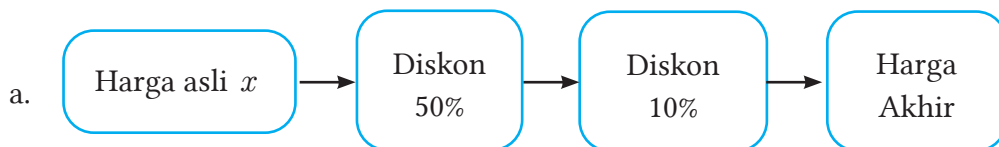
Masalah pertama

1.

Harga awal	Diskon 20%	Potongan Rp25.000,00	Harga akhir
Rp100.000,00	Rp80.000,00	Rp55.000,00	Rp55.000,00
Rp150.000,00	Rp120.000,00	Rp95.000,00	Rp95.000,00
Rp200.000,00	Rp160.000,00	Rp135.000,00	Rp135.000,00
Rp250.000,00	Rp200.000,00	Rp175.000,00	Rp175.000,00
x	$0.8x$	-Rp25.000	$0.8x - 25000$

2. $y = 0.7x - 10000$

Masalah Kedua

a.

$f(x) = 0,5\,x$

$g(x) = 0,9\,x$

$y = 0,45\,x$

b. Domain: [100.000, 1.000.000]

Range: [45.000, 450.000]

Metode & Aktivitas Pembelajaran

Pastikan siswa memahami komposisi fungsi. Gunakan mesin fungsi dan diagram panah untuk memperjelas pemahaman komposisi fungsi. Guru memberikan lagi soal-soal latihan komposisi fungsi untuk memastikan pemahaman siswa. Soal-soal berupa konteks dunia nyata yang melibatkan variabel. Berikan contoh lain. Misalkan, dalam kelistrikan. Hambatan listrik R berbanding lurus dengan panjang l, R = ρl/A, di mana ρ adalah hambat

jenis, l adalah panjang dan A adalah luas penampang penghantar. Arus listrik I diberikan sebagai tegangan V/hambatan R. Jika keduanya dikomposisikan maka arus I adalah fungsi dari panjang kawat l.

Guru juga mengarahkan siswa untuk memahami domain, kodomain, dan *range* dari komposisi fungsi. Domain dan *range* menjadi penentuan apakah dua fungsi dapat dikomposisikan. Eksplorasi 1.4 mengarahkan siswa untuk memahami apa yang menjadi syarat komposisi dua fungsi.

Diferensiasi

Bagi siswa yang mengalami kesulitan memahami komposisi fungsi tekankan penggunaan diagram panah dan mesin fungsi untuk membahas soal-soal menggunakan variabel. Jelaskan kembali contoh-contoh nyata sederhana yang berkaitan dengannya untuk memudahkan pemahaman.

Bagi siswa dengan kecepatan belajar tinggi (*advanced*), minta mereka membuat pertanyaan-pertanyaan tambahan untuk dijawab baik sendiri maupun dari teman dengan kecepatan belajar tinggi. Minta mereka juga mencatat jika ada pertanyaan yang tidak dapat mereka jawab dengan informasi yang ada.

Pemanasan

Mulai aktivitas pembelajaran dengan mendiskusikan apakah dua fungsi pasti dapat dikomposisikan. Gunakan permasalahan pembuatan keripik tempe untuk membahas hal ini. Tanyakan dan diskusikan, “Apakah ada syarat pembuatan keripik tempe?” Jika jumlah tempe yang tersedia tidak cukup untuk membuat keripik tempe maka komposisi fungsi tidak dapat dikerjakan karena mesin beroperasi dengan syarat jumlah tempe tertentu.

Setelah diskusi, minta siswa melakukan Eksplorasi 1.4. Siswa menyelesaikan dua masalah yang berkaitan dengan domain dan *range* dari dua fungsi yang akan dikomposisikan untuk mendapatkan syarat komposisi dua fungsi.

Siswa dapat melakukan kedua eksplorasi secara individu terlebih dahulu kemudian diskusi secara berpasangan atau dalam kelompok, atau langsung bekerja sama berpasangan atau dalam kelompok.

Pada bagian eksplorasi, biarkan siswa mencoba dan tidak dituntut pasti mendapatkan jawabannya. Tujuannya adalah supaya mereka memahami syarat komposisi fungsi dan penerapannya dalam menyelesaikan masalah.

Kunci Jawaban Eksplorasi 1.4

Masalah Pertama

a. Fungsi $f(x)$, Domain : $\{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq 9\}$

Range : $\{y \in \mathbb{R}: 1 \leq y \leq 5\}$

Fungsi $g(x)$, Domain : $\{x \in \mathbb{R}: 1 \leq x \leq 5\}$

Range : $\{y \in \mathbb{R}: 1 \leq y \leq 5\}$

b. Fungsi $(f \circ g)(x)$,Domain: $\{x \in \mathbb{R}: 1 \leq x \leq 5\}$,Range: $\{y \in \mathbb{R}: 1 \leq y \leq 4\}$

c. *Range* dari $g(x)$ merupakan domain bagi $(f \circ g)(x)$

Masalah Kedua

Komposisi $(g \circ f)(x)$ merupakan komposisi yang valid karena *range* fungsi f adalah subhimpunan dari domain fungsi g.

Metode & Aktivitas Pembelajaran

Pastikan siswa memahami syarat komposisi fungsi. Gunakan diagram panah dan grafik terlebih dahulu untuk memperjelas pemahaman syarat komposisi fungsi. Pastikan siswa dapat menentukan domain dan *range* dari setiap fungsi. Latih dengan diagram panah terlebih dahulu, lalu dengan grafik. Kemudian, berikan fungsi dengan variabel. Perhatikan hal-hal mendasar seperti bentuk akar dan penyebut dalam fungsi ketika menentukan domain dan *range*. Perhatikan juga cara siswa menuliskan domain dan *range*.

Diferensiasi

Bagi siswa yang sulit memahami syarat komposisi fungsi, latih dengan berbagai diagram panah dan grafik untuk menentukan domain dan *range*. Untuk soal dengan variabel minta siswa menggambar grafiknya terlebih dahulu sehingga mereka dapat menentukan domain dan *range*. Lebih mudah untuk menentukan apakah syarat komposisi fungsi dipenuhi.

Pemanasan

Mulai aktivitas pembelajaran dengan mendiskusikan sifat komutatif dan asosiatif yang berlaku pada operasi bilangan. Operasi apa saja yang memenuhi sifat komutatif dan sifat asosiatif pada bilangan. Tanyakan, “Apakah proses pembuatan kedelai menjadi tempe dan tempe menjadi keripik tempe memenuhi sifat komutatif?” Sifat komutatif adalah sifat pertukaran. Diskusikan hal ini.

Untuk sifat asosiatif diskusikan contoh-contoh nyata yang dapat berkaitan dengannya. Sifat asosiatif memerlukan tiga proses. Contoh, pembuatan keripik tempe. Ketiga proses adalah pembuatan tempe dari biji kedelai, pembuatan potongan tempe dan pembuatan keripik tempe. Tanyakan, “Apakah contoh pembuatan keripik tempe dapat dikaitkan dengan sifat asosiatif?” Minta mereka memikirkan contoh-contoh nyata lainnya.

Ingatkan siswa syarat komposisi fungsi sehingga siswa memikirkan hal ini ketika menyelidiki operasi yang berkaitan dengan sifat komutatif dan sifat asosiatif.

Setelah diskusi, minta siswa melakukan Eksplorasi 1.8 dan 1.9. Siswa menyelesaikan dua masalah yang berkaitan dengan penyelidikan sifat komutatif dan sifat asosiatif.

Siswa dapat melakukan kedua eksplorasi secara individu terlebih dahulu kemudian diskusi secara berpasangan atau dalam kelompok, atau langsung bekerja sama berpasangan atau dalam kelompok.

Pada bagian eksplorasi, biarkan siswa mencoba dan tidak dituntut pasti mendapatkan jawabannya. Tujuannya adalah supaya mereka dapat menyelidiki sifat komutatif dan sifat asosiatif pada komposisi fungsi.

Kunci Jawaban Eksplorasi 1.5

Siswa menyelidiki sifat komutatif dan sifat asosiatif dari komposisi fungsi.

Masalah Pertama

Misalkan harga asli barang sebesar Rp100.000,00. Harga setelah diskon 25% yang dilanjutkan 20% = 0,75 × Rp100.000,00 × 0,8 = Rp60.000,00

Harga setelah diskon 20% yang dilanjutkan 25% = 0,8 × Rp100.000,00 × 0,75 = Rp60.000,00

Sifat komutatif berlaku.

Masalah Kedua

Pendekatan yang sama seperti pada masalah pertama dapat dilakukan untuk soal ini.

Misalkan harga asli barang sebesar Rp100.000,00. Harga setelah diskon 25% yang dilanjutkan dengan potongan harga Rp15.000,00 = Rp75.000,00 – Rp15.000,00 = Rp60.000,00

Misalkan harga asli barang sebesar Rp100.000,00. Harga setelah potongan Rp15.000,00 dilanjutkan dengan diskon 25% = 0,75 × Rp85.000,00 = Rp63.750,00

Sifat komutatif tidak berlaku pada contoh soal ini.

Masalah Ketiga

- Domain dari $f(x) = 2x + 1$ adalah $(-\infty, \infty)$.
- Domain dari $g(x) = x^2 + 4$ adalah $(-\infty, \infty)$.
- Domain dari $h(x) = \frac{1}{1+x}$ adalah $(-\infty - 1) \cup (-1, \infty)$
- Range dari $f(x) = 2x + 1$ adalah $(-\infty, \infty)$.

- Range dari $g(x) = x^2 + 4$ adalah $[4, \infty)$
- Range dari $h(x) = \frac{1}{1+x}$ adalah $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Komposisi yang merupakan fungsi: $g \circ f, f \circ g, f \circ h, g \circ h, h \circ g$

Komposisi yang bukan merupakan fungsi: $h \circ f$

1. $(g \circ f)(x) = (2x+1)^2 + 4 \neq 2(x^2+4) + 1 = (f \circ g)(x)$ (Tidak komutatif)
2. $(f \circ h)(x) = 2\left(\frac{1}{x+1}\right) + 1 \neq \frac{1}{2x+2} = (h \circ f)(x)$ (Tidak komutatif)
3. $(g \circ h)(x) = \left(\frac{1}{(x+1)}\right)^2 + 4 \neq \frac{1}{x^2+5} = (h \circ g)(x)$ (Tidak komutatif)

Sifat Asosiatif

1. a. $f(h \circ g))(x) = \frac{2}{x^2+5} + 4 = ((f \circ h) \circ g)(x)$ (Asosiatif)

   b. $(h(f \circ g))(x) = \frac{1}{2x^2+10} = ((h \circ f) \circ g)(x)$ (Asosiatif)

   c. $(g(f \circ h))(x) = \left(\frac{2}{x+1} + 1\right)^2 + 4 = ((g \circ f) \circ h)(x)$ (Asosiatif)
2. Konfigurasi komposisi yang mungkin:
   - $(f(g \circ h))(x) = ((f \circ g) \circ h)(x)$ (Asosiatif)
   - $(h(g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x)$ (Asosiatif)

Metode & Aktivitas Pembelajaran

Ingatkan selalu bahwa fungsi-fungsi yang akan dikomposisikan perlu dicek domain dan *range* masing-masing untuk memenuhi komposisi fungsi. Berikan beberapa fungsi lainnya, minta siswa mengecek fungsi-fungsi yang dapat dikomposisikan dan selidiki apakah berlaku sifat komutatif dan sifat asosiatif.

Diferensiasi

Bagi siswa yang sulit menyelidiki sifat komutatif dan sifat asosiatif dari komposisi fungsi maka siswa perlu latihan menyelesaikan soal komposisi dua fungsi. Berikan latihan-latihan soal komposisi fungsi sebelum menyelidiki sifat komutatif dan sifat asosisatif dari komposisi fungsi.

Bagi siswa dengan kecepatan belajar tinggi (*advanced*), minta mereka membuat pertanyaan-pertanyaan tambahan untuk dijawab baik sendiri maupun dari teman dengan kecepatan belajar tinggi. Minta mereka juga mencatat jika ada pertanyaan yang tidak dapat mereka jawab dengan informasi yang ada.

Jawaban Latihan 1.4

1. Jika $f(x)=\frac{1}{x}$ dan $g(x)=2x+1$ maka
   a) $(f\circ g)(x)=\frac{1}{2x+1}$
   b) $(f\circ g)(3)=\frac{1}{7}$ dan $(f\circ g)(-3)=-\frac{1}{5}$
   c) $a=-1$
2. Jika $f(x)=\frac{1}{2x+1}$ dan $g(x)=2x^2+1$ maka
   a) $(f\circ g)(x)=\frac{1}{4x^2+3}$
   b) $(g\circ f)(x)=\frac{2}{4x^2+4x+1}+1$
   c) Domain dan Range $(f\circ g)(x)$ adalah semua bilangan riil,
   d) Domain $(g\circ f)(x)$ adalah semua bilang riil kecuali $-\frac{1}{2}$, Rangenya ialah semua bilangan riil.
3. Ada banyak kemungkinan untuk nilai a dan b yang memenuhi, contoh $a=-1$ dan $b=2$.
4. $g(x)=2x+3$

5. Lengkapi tabel di bawah ini.

x	$f(x)$
-2	-1
-1	0
0	1
1	2
2	3

$f(x)$	$g(f(x))$
-1	0,5
0	1
1	2
2	4
3	8

x	$g(f(x))$
-2	0,5
-1	1
0	2
1	4
2	8

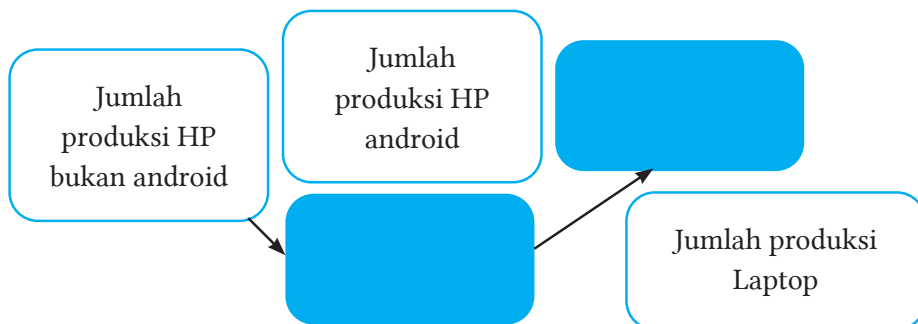
6. 13

7. $b(x) = 100.000x + 120.000$

   $10.120.000 = 100.000x + 120.000$

   $10.000.000 = 100.000x$

   $x = 100$

8. Misal $f(x) = 2x$ menyatakan jumlah produksi HP android dengan x menyatakan jumlah produksi HP bukan android. Misal juga $g(x) = 3x$ menyatakan jumlah produksi Laptop dengan x menyatakan jumlah produksi HP android. Mesin fungsi untuk mengetahui jumlah produksi laptop jika diketahui jumlah produksi HP bukan android, siswa bisa membuat mesin fungsi:

9. Jawaban diberikan secara berurutan:

   a) $t(x) = x + 0,075\,x$

   b) $f(x) = x + 20000$

   c) $(f \circ t)(x) = x + 0,075\,x + 20000$ dan

   d) $(t \circ f)(x) = x + 0,075\,x + 1500$. Fungsi $(t \circ f)(x)$ (menunjukkan biaya yang lebih kecil dibandingkan $(f \circ t)(x)$.

   e) $(f \circ t)(x)$.

Refleksi

Tutup pembelajaran dengan meminta siswa melakukan refleksi terhadap apa yang sudah mereka pelajari dengan menjawab pertanyaan refleksi.

1. Apakah saya dapat menjelaskan syarat dan aturan pembuatan komposisi fungsi yang terdiri atas dua atau lebih fungsi?
2. Apakah saya dapat membuat komposisi fungsi yang terdiri atas dua atau lebih fungsi?
3. Bagaimana saya menggunakan komposisi fungsi untuk membuat permodelan masalah sehari-hari dan menyelesaikannya?

C. Fungsi Invers

Pengalaman Belajar

- Menjelaskan syarat dan aturan pembuatan fungsi *invers*; dan
- Menggunakan konsep fungsi *invers* untuk menyelesaikan masalah.

Sarana & Prasarana Pembelajaran

- Aplikasi *Geogebra*
- Aplikasi *Microsoft Excel*
- Penggaris
- Kertas berpetak
- Alat tulis

Apersepsi

Perkenalkan subbab ini dengan mendiskusikan aplikasi penerjemahan bahasa Inggris dan bahasa Indonesia. Jika memasukkan suatu kata dalam bahasa Inggris maka dapat dicari terjemahannya dalam bahasa Indonesia. Jadi proses penerjemahan dapat bekerja bolak-balik. Guru mengarahkan siswa dalam kehidupan sehari-hari untuk memikirkan proses lainnya yang bekerja secara berkebalikan.

Pemanasan

Tanyakan kepada siswa, apakah relasi yang diperoleh dari penerjermahan balik dari bahasa Indonesia ke bahasa Inggris membentuk fungsi atau tidak. Untuk membantu siswa menjawab ini, ingatkan siswa tentang pengertian fungsi.

Guru menstimulasi siswa untuk berpikir tentang fungsi yang berkebalikan. Misalnya, masalah uang dan jumlah barang yang dibeli. Jika harga suatu barang diketahui, maka harga sejumlah barang dapat ditentukan. Tanyakan mengapa proses kebalikan (*invers*) ini juga membentuk fungsi. Guru mengingatkan siswa tentang pengertian fungsi. Guru meminta siswa memberikan contoh-contoh fungsi berkebalikan.

Guru melanjutkan dengan pertanyaan yang lebih umum: Apakah semua relasi kebalikan selalu membentuk fungsi?

Metode & Aktivitas Pembelajaran

Pada subbab ini, ajak siswa-siswi untuk meninjau fungsi injektif, surjektif, dan bijektif. Gunakan Gambar 1.9, 1.11, serta 1.25. Tekankan bahwa dengan memahami ketiga jenis fungsi ini, siswa-siswi akan mampu menjawab pertanyaan sebelumnya, apakah semua relasi kebalikan selalu membentuk fungsi. Gunakan diagram panah pada gambar 1.25. Jelaskan bahwa pada **relasi injektif** (satu-satu) setiap anggota di kodomain B yang terhubung panah memiliki tepat satu anggota dalam domain A. Tekankan bahwa relasi ini **tidak mengharuskan** semua anggota di B berelasi dengan anggota di A. Sebagai contoh, anggota 5 di B, tidak berelasi dengan anggota manapun di A. Lanjutkan dengan diagram panah yang menjelaskan **relasi surjektif**. Tekankan bahwa pada relasi ini, **semua anggota** di B harus berelasi dengan anggota di A. Relasi ini tidak harus bersifat satu-satu; contoh anggota a dan e terhubung dengan anggota yang sama di B yaitu 4. Pada diagram panah tentang **relasi bijektif**, jelaskan bahwa relasi ini adalah kombinasi dari relasi injektif dan surjektif di mana setiap anggota di B harus terhubung dengan tepat satu anggota di A. Tekankan juga bahwa berarti relasi ini bisa terbentuk apabila **jumlah anggota di A sama dengan jumlah anggota di B.**

Siswa menjelaskan pengertian fungsi injektif dan surjektif dengan kata-katanya sendiri.

Jelaskan bahwa fungsi kuadrat **bukan merupakan fungsi bijektif.** Gunakan gambar grafik fungsi kuadrat, pilih satu angka pada sumbu y (anggota kodomain) dan tekankan bahwa angka tersebut merupakan *output* dari dua angka yang berbeda pada sumbu x. Ini menyalahi pengertian fungsi bijektif.

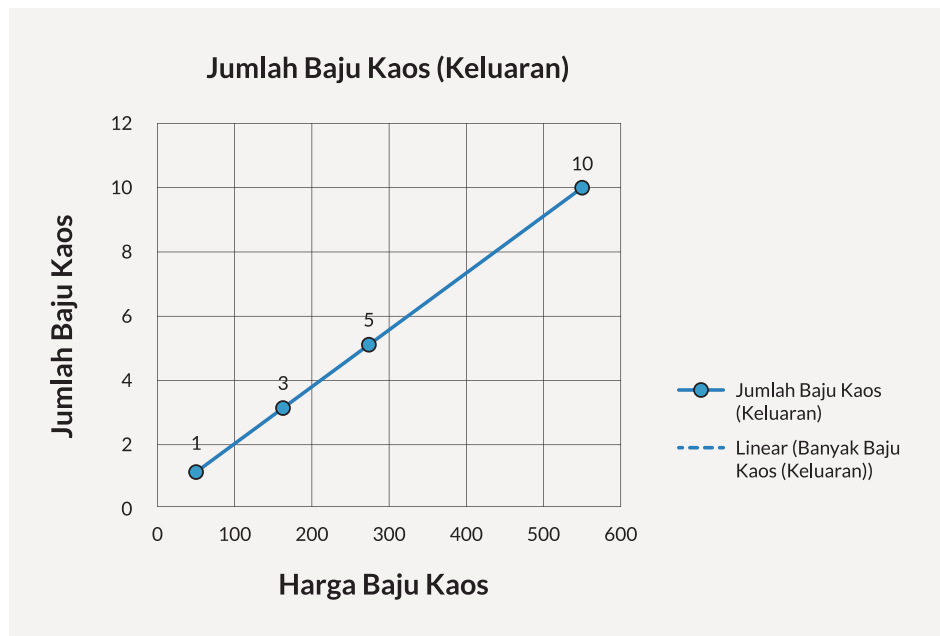
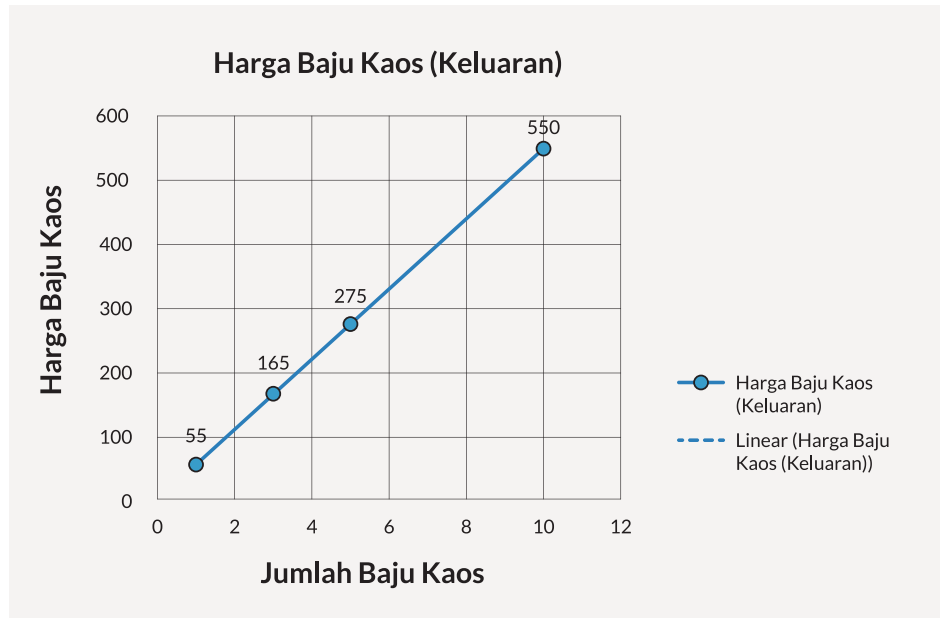
Fungsi eksponensial merupakan **fungsi bijektif**. Jelaskan dengan menggunakan definisi fungsi bijektif di atas.

Siswa menjelaskan mengapa fungsi bijektif memiliki *invers.* Jika memungkinkan, ajak siswa berkomunikasi dalam kelompok kecil, beri waktu berdiskusi, lalu dari setiap kelompok tunjuklah satu juru bicara untuk menjelaskan hasil diskusi mereka.

Kunci Jawaban Eksplorasi 1.6
Masalah Pertama

1.

Jumlah Baju Kaos (Keluaran)	Harga Baju Kaos (Masukan)
1	55.000
3	165.000
5	275.000
10	550.000

2.

3. Untuk grafik pertama:

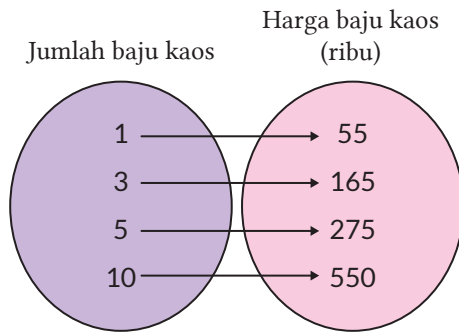
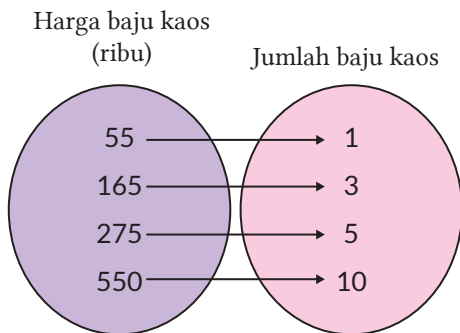
   Domain: $\{1, 3, 5, 10\}$

   Range: $\{55.000, 165.000, 275.000, 550.000\}$

Untuk grafik kedua:

Domain: $\{55.000, 165.000, 275.000, 550.000\}$

Range: $\{1, 3, 5, 10\}$

4. Diagram panah fungsi asli:

5. Diagram panah fungsi *invers* (kebalikan):

Masalah kedua

1. Harga awal pakaian (menggunakan mesin fungsi) Rp100.000.
2. $x = 5\left(\frac{y + 15000}{3}\right)$

Pada bagian ini, guru menjelaskan secara umum bahwa fungsi *invers* ialah fungsi yang memetakan anggota di *range* fungsi asal ke anggota di domain fungsi asal. Tekankan juga penggunaan notasi f^{-1} untuk fungsi *invers*. Ingatkan bahwa -1 di sini bukanlah pangkat.

Guru juga menjelaskan bagaimana memperoleh fungsi *invers* dari suatu fungsi asal yang diketahui bentuk aljabar nya. Jelaskan langkah-langkah yang harus dilakukan untuk memperoleh fungsi *invers*. Bila perlu, mulai dengan sebuah contoh fungsi asal dalam bentuk persamaan aljabar, dan terapkan setiap langkah-langkah yang ada di buku siswa untuk memperoleh fungsi *invers* dari fungsi asal tersebut.

Diferensiasi

Bagi siswa yang mengalami kesulitan memahami fungsi *invers* maka gunakan diagram panah dan grafik untuk memperjelas pemahaman termasuk menentukan domain dan *range* dari fungsi *invers*. Latih juga siswa dengan berbagai soal agar dapat merumuskan fungsi *invers* jika suatu fungsi diketahui.

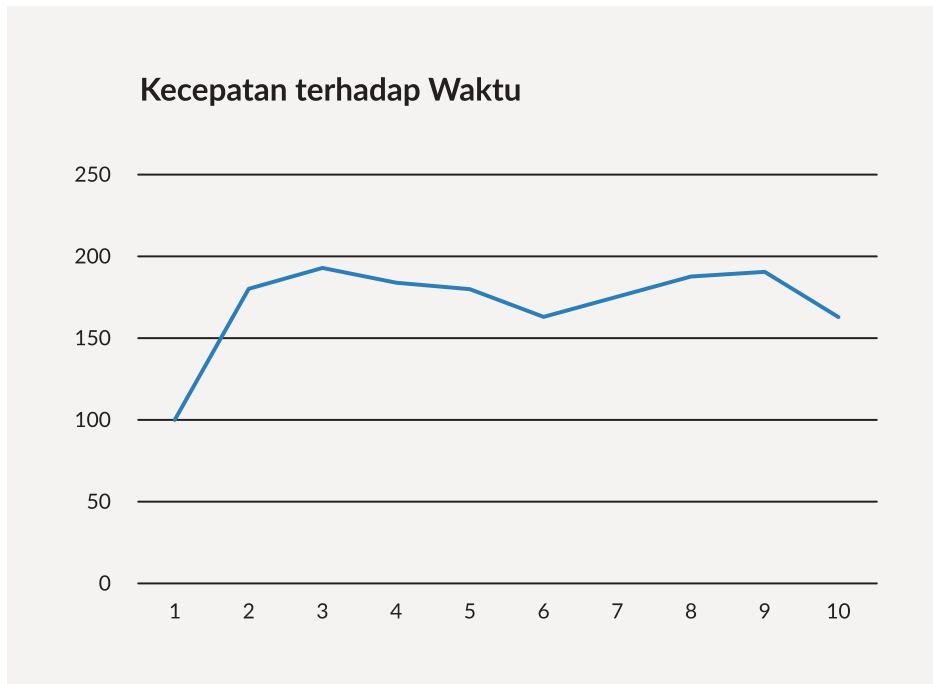
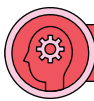
Bagi siswa dengan kecepatan belajar tinggi (*advanced*), minta mereka membuat pertanyaan-pertanyaan tambahan untuk dijawab baik sendiri maupun dari teman dengan kecepatan belajar tinggi. Minta mereka juga mencatat jika ada pertanyaan yang tidak dapat mereka jawab dengan informasi yang ada.

Pemanasan

Mulai aktivitas pembelajaran dengan mendiskusikan apakah semua fungsi mempunyai *invers*. Berikan contoh pembuatan keripik tempe, tanyakan apakah prosesnya dapat berkebalikan. Diskusikan kembali fungsi injektif, fungsi surjektif, dan fungsi bijektif. Tanyakan mengapa pemahaman ketiga fungsi ini menjadi penting dalam menentukan fungsi *invers*.

Setelah diskusi, minta siswa melakukan Eksplorasi 1.7. Siswa menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan fungsi injektif, fungsi surjektif dan fungsi bijektif untuk menentukan apakah fungsi mempunyai *invers* atau tidak.

Kunci Jawaban Eksplorasi 1.7

1. Data waktu dan kecepatan membentuk relasi. Relasi adalah fungsi.
2. Grafik Kecepatan terhadap Waktu

3. Invers relasi dilakukan dengan menukar masukan menjadi keluaran dan keluaran menjadi masukan.
4. Relasi *invers* bukan merupakan fungsi karena ada dua anggota domain yang sama menghasilkan *range* yang berbeda.
5. Ya relasinya menjadi surjektif dan injektif.
6. Ya relasi asli membentuk fungsi bijektif sehingga *invers* relasi merupakan suatu fungsi.

Tentu. Konversi satuan dapat dipahami sebagai sebuah fungsi bijektif.

Berikan contoh konversi dari satuan gram ke kilogram.

Metode & Aktivitas Pembelajaran

Pastikan siswa memahami bahwa suatu fungsi mempunyai *invers* jika fungsi tersebut mempunyai relasi bijektif (surjektif dan injektif). Tanyakan kembali apa yang dimaksud dengan fungsi surjektif, fungsi injektif, dan fungsi bijektif. Gunakan diagram panah untuk memantapkan pemahaman tentang ketiga jenis fungsi tersebut. Berikan contoh-contoh fungsi yang mempunyai *invers* dan tidak mempunyai *invers*, baik dalam bentuk tabel, grafik maupun diagram panah. Gunakan pemahaman pencerminan ketika mengerjakan soal grafik sehingga dapat melihat karakteristik fungsi yang tidak mempunyai *invers*.

Diferensiasi

Bagi siswa yang sulit memahami apakah fungsi mempunyai *invers* atau tidak maka gunakan diagram panah dan grafik untuk memperjelas pemahaman. Tuntun dengan pemahaman fungsi surjektif dan injektif sehingga menjadi fungsi bijektif. Latih siswa dengan soal-soal agar lancar menentukan apakah fungsi mempunyai *invers* atau tidak.

Bagi siswa dengan kecepatan belajar tinggi (*advanced*), minta mereka membuat pertanyaan-pertanyaan tambahan untuk dijawab baik sendiri maupun dari teman dengan kecepatan belajar tinggi. Minta mereka juga mencatat jika ada pertanyaan yang tidak dapat mereka jawab dengan informasi yang ada.

Pemanasan

Mulai aktivitas pembelajaran dengan mendiskusikan *invers* dari komposisi fungsi. Berikan kasus proses kedelai menjadi tempe dan proses tempe menjadi keripik tempe, fokus pada jumlahnya. Jika banyak keripik tempe

diketahui, dapatkah kita menentukan banyak kedelai yang digunakan? Karena mesin mempunyai syarat pengoperasian yang berkaitan dengan jumlah, maka domain dan kodomain dari setiap proses dapat ditentukan. Diskusikan domain dan kodomain dari setiap proses.

Setelah diskusi, minta siswa melakukan eksplorasi 1.8. Siswa menyelesaikan masalah untuk menentukan domain dan kodomain dari *invers* dari komposisi fungsi.

Kunci Jawaban Eksplorasi 1.8

1. $f(x) = 80\%x$, dengan x adalah harga asli.
2. $g(x) = x - 10000$, dengan x adalah harga setelah 20% diskon.
3. Benar, karena berdasarkan deskripsi soal harga akhir ditentukan dengan rumus $80\%x - 10000$ yang mana sama dengan fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$.
4. Fungsi $(f \circ g)(x)$ mengurangi harga asli x sebesar Rp 10.000,00 sehingga diperoleh harga baru, lalu menerapkan diskon 20% terhadap harga baru tersebut.
5. $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{100}{80}(x + 10000)$, dengan x adalah harga akhir.
6. $(g \circ f)^{-1}(30000) = \frac{100}{80}(30000 + 10000) = 50000$,
7. Benar. Pada bagian ini ajak siswa untuk menuliskan *invers* dari fungsi f dan g, lalu tuliskan $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$, bandingkan dengan jawaban pada nomor (5). Dari sini, ajak siswa untuk memahami kasus yang lebih umum, bisa dibantu dengan menggunakan mesin fungsi atau diagram panah.

Metode & Aktivitas Pembelajaran

Pastikan siswa memahami komposisi fungsi dan fungsi *invers*. Gunakan mesin fungsi dan diagram panah untuk memperjelas pemahaman komposisi fungsi dan mencari *invers*nya. Latih siswa untuk menentukan domain, kodomain, dan *range* dengan menggunakan diagram panah dan grafik.

Kemudian, berikan siswa soal-soal yang sudah melibatkan fungsi dengan variabel. Siswa mengerjakan operasinya untuk mendapatkan *invers* dan komposisi fungsi.

Diferensiasi

Bagi siswa yang mengalami kesulitan memahami komposisi fungsi dan *invers* tekankan penggunaan diagram panah, mesin fungsi dan grafik. Latih dengan berbagi soal. Latih juga menentukan domain, kodomain, dan *range*.

Bagi siswa dengan kecepatan belajar tinggi (*advanced*), minta mereka membuat pertanyaan-pertanyaan tambahan untuk dijawab baik sendiri maupun dari teman dengan kecepatan belajar tinggi. Minta mereka juga mencatat jika ada pertanyaan yang tidak dapat mereka jawab dengan informasi yang ada.

Refleksi

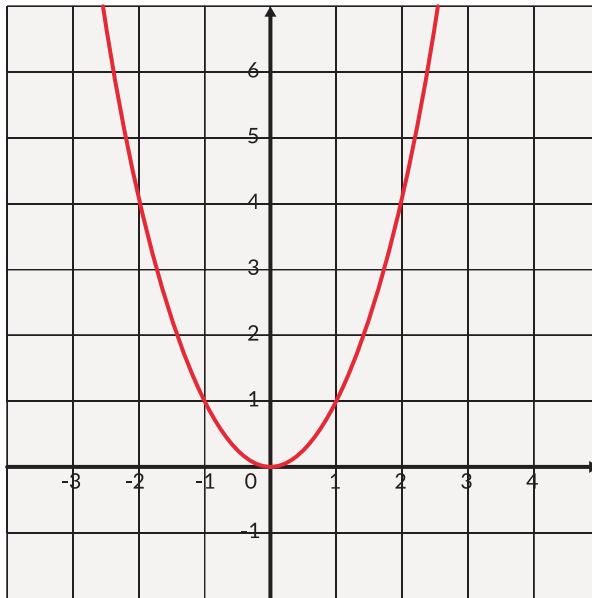
Tutup pembelajaran dengan meminta siswa melakukan refleksi terhadap apa yang sudah mereka pelajari dengan menjawab pertanyaan refleksi.

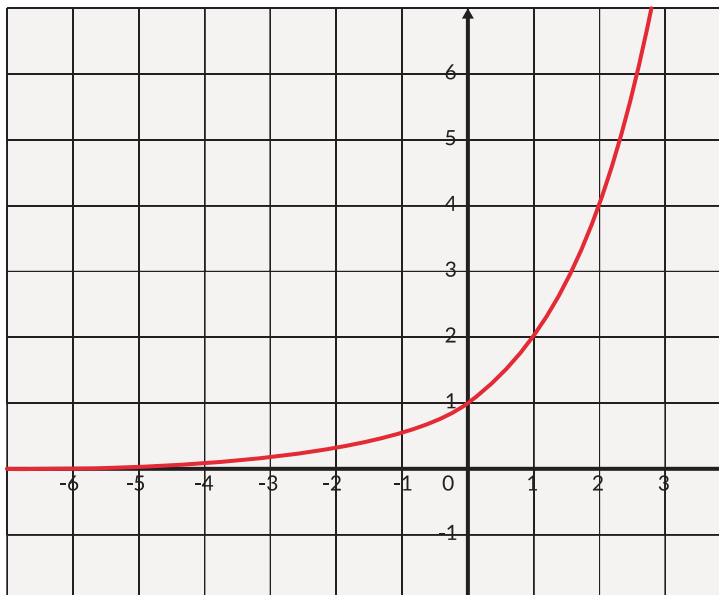
1. Apakah saya dapat menjelaskan syarat dan aturan pembuatan fungsi *invers*?
2. Menggunakan fungsi *invers* untuk membuat permodelan masalah sehari-hari dan menyelesaikannya.

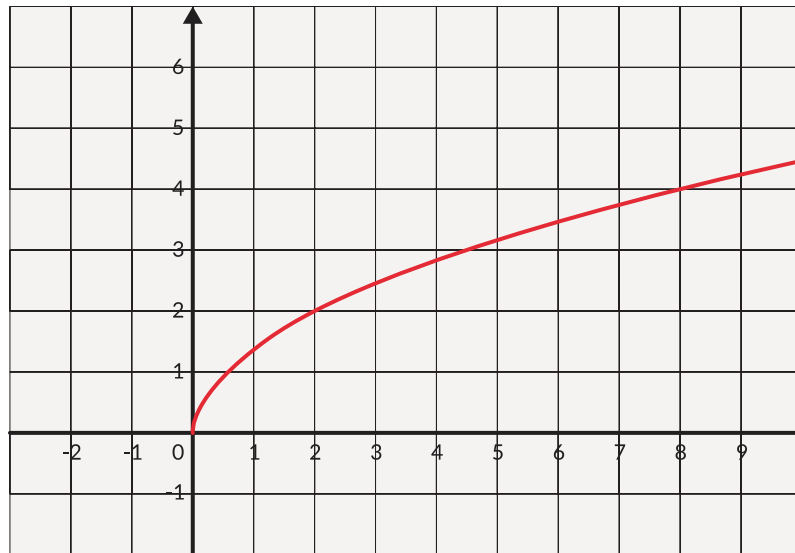
Jawaban Latihan 1.5

1. Gambarkan fungsi-fungsi di bawah ini dan tentukan apakah fungsi-fungsi tersebut mempunyai fungsi *invers*. Jelaskan alasanmu.

   a) $f(x) = x^2$

   Tidak memiliki fungsi *invers*nya jika $x \in \mathbb{R}$. Namun jika $f(x) = x^2$ untuk $x \geq 0$ memiliki fungsi *invers* $y = \sqrt{x}$ untuk $x \geq 0$

b) $f(x) = 2^x$

Memiliki fungsi *invers*nya karena $f(x)$ adalah fungsi satu-satu.

c) $f(x)=\sqrt{2x}$

Memiliki fungsi *invers*nya karena $f(x)$ adalah fungsi satu-satu.

2. Berikut ini

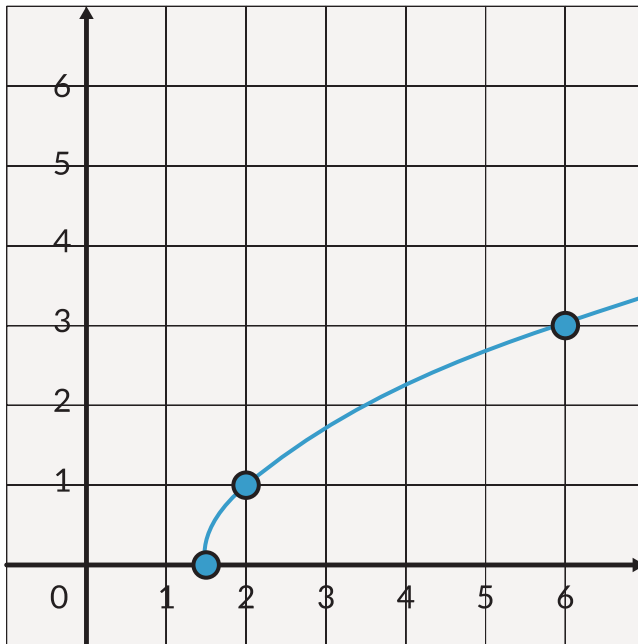
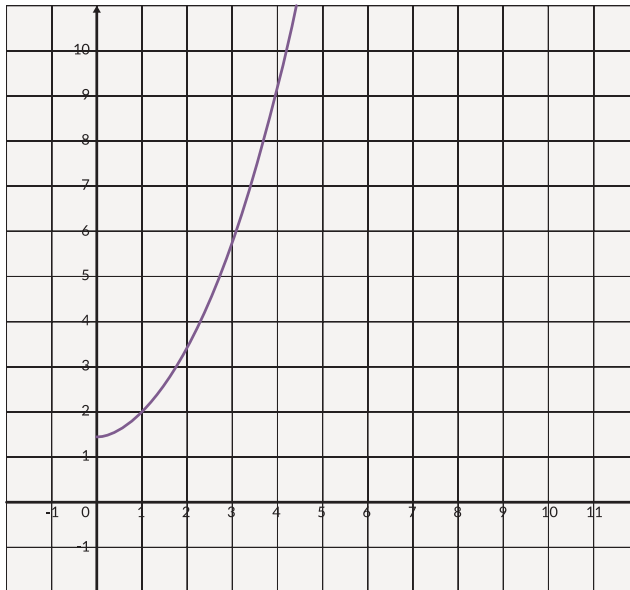
a) $f^{-1}(x)=x^{\frac{1}{3}}$, domain dan *range*: semua bilangan riil.

b) $f^{-1}(x)=\dfrac{x-1}{-3}$, domain dan *range*: semua bilangan riil.

c) $f^{-1}(x)=x^2+3$, domain: semua bilangan riil nonegatif, *range*: semua bilangan rill lebih dari sama dengan 3.

d) $f^{-1}(x)=\dfrac{x-1}{-3}$, domain dan *range*: semua bilangan riil.

e) $f^{-1}(x)=\dfrac{4+5x}{2x-1}$, domain: semua bilangan riil kecuali 1/2, *range*: semua bilangan riil kecuali 5/2.

3. Berikut ini adalah grafik dari fungsi $g(x)=\sqrt{2x-3}$

a) Gambarkan grafik dari *invers* fungsi $g(x)$

b) Temukan persamaan matematis untuk fungsi *invers* $g^{-1}(x)$.

$y = \dfrac{x^2 + 3}{2}, \; x \geq 0$

c) Plot lah dengan menggunakan beberapa titik fungsi *invers* $g^{-1}(x)$.

   (0; 1,5), (1, 2), (2; 3,5), (3, 6), dst.

d) Bandingkan apakah grafik yang diperoleh dari c sama dengan grafik pada bagian (a).

   Sama.

   Diketahui $f(x) = 2x + b$ dan $f(f(x)) = 4x + 6$.

a) Tentukan nilai b

   $f(f(x)) = 4x + 6$

   $f(2x + b) = 4x + 6$ ...substitusi $f(x) = 2x + b$

   $2(2x + b) + b = 4x + 6$ ...substitusi $f(2x + b) = 2(2x + b) + b$

   $4x + 3b = 4x + 6$

   $3b = 6$

   $b = 2$

b) Tentukan $f^{-1}(x)$.

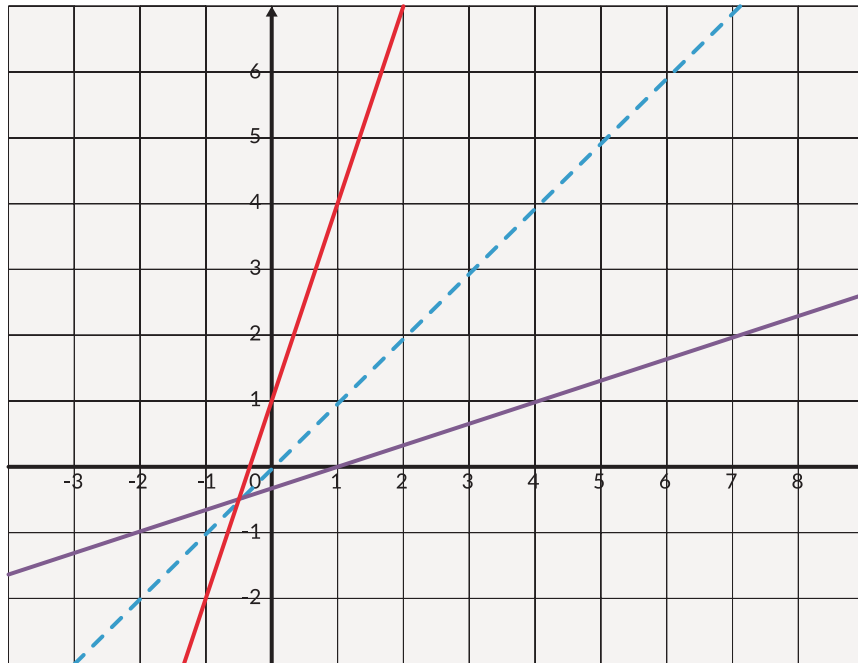
   $f(x) = 2x + 2$

   $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 2}{2}$

5. Tidak bijektif: dapat dilihat dari grafik bahwa pemetaan bukan satu-satu atau injektif.

   Tidak surjektif: karena grafik tidak memberikan informasi ketika jumlah badak dibawah 25 ekor. Dengan kata lain, tidak semua anggota di kodomain (jumlah badak) terhubung dengan anggota di domain (tahun).

Jawaban Uji Kompetensi

1. Berikut jawaban untuk nomor 1 secara berurutan:
   a) Iya
   b) Domain: $\{x \mid 0,539 \le x \le 3,461\}$, Range: $\{y \mid 0 \le y \le 160\}$.
   c) Tentu
   d) Iya, karena domainnya sudah dibatasi yakni semua bilangan kelipatan 10000
2. Siswa memberikan contoh fungsi yang memiliki *invers* dalam kehidupan sehari-hari. Jawaban bisa bervariasi.
3. Siswa memberikan contoh fungsi yang tidak memiliki *invers* dalam kehidupan sehari-hari. Jawaban bisa bervariasi.
4. Siswa memberikan contoh komposisi dalam kehidupan sehari-hari. Jawaban bisa bervariasi.
5. Tidak, karena relasi kebalikannya bukan merupakan fungsi.
6. Pendapat bisa disampaikan secara bervariasi. Namun guru harus memastikan bahwa jawaban yang disampaikan benar. Kalau salah, harus dikoreksi.
7. Jawaban diberikan secara berurutan:
   a) 1
   b) 8
   c) Kuadrat
   d) Kuadrat
   e) Domain harus dibatasi. Contoh dengan hanya memakai $x \ge 0$ atau $x \le 0$.
8. Perhatikan $f(x) = 3x + 1$ dan $g(x) = \frac{x-1}{3}$.
   a) Gambarkan kedua fungsi tersebut pada satu sistem koordinat.

b) Lakukan fungsi komposisi $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$. Jelaskan hasil yang diperoleh.

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
&= 3g(x) + 1 \\
&= 3\left(\frac{x-1}{3}\right) + 1 \\
&= x - 1 + 1 \\
&= x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\
&= \frac{f(x) - 1}{3} \\
&= \frac{3x + 1 - 1}{3} \\
&= 3\frac{x}{3} \\
&= x
\end{aligned}
$$

Hasil $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$ sama, yakni x.

c) Berdasarkan hasil a dan b apakah yang dapat disimpulkan?

Fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ saling *invers*

9. *Hang time*

   a. $h = \frac{1}{2} gt^2$ di mana h adalah ketinggian, t adalah *hang time* dan g adalah gravitasi.

   b. $t = \sqrt{2h/g}$

      Fungsi *invers* berupa *hang time* sementara yang diketahui adalah ketinggian lompat.

      Ada hubungan antara ketinggian lompatan dengan kesempatan memasukkan bola.

   c. Siswa memilih salah seorang pemain basket yang diketahui ketinggian lompatan.

Pengayaan

Proyek ini bersifat opsional dan dapat diberikan sebagai tugas tambahan. Mintalah siswa mempelajari dengan seksama tugas yang diberikan.

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2021

Buku Panduan Guru Matematika
untuk SMA/SMK Kelas XI

Penulis: Dicky Susanto, dkk.

ISBN: 978-602-244-789-4 (jil.2)

Bab 2

Lingkaran

Tujuan pembelajaran:

Setelah mempelajari bab ini, siswa dapat:

1. Menerapkan teorema lingkaran dalam menyelesaikan permasalahan yang terkait
2. Membuktikan teorema yang berhubungan dengan lingkaran
3. Menemukan sifat-sifat garis singgung pada lingkaran
4. Menemukan sifat-sifat segiempat tali busur

Peta Konsep

Gambaran Umum Bab

Bab ini bertujuan mengembangkan kemampuan siswa untuk mengidentifikasi pola, membuat praduga, dan memberikan argumen dan pembuktian melalui topik mengenai teorema yang berhubungan dengan lingkaran.

Pada subbab A dibahas teorema yang berkaitan dengan lingkaran dan busur lingkaran. Subbab B mengajak siswa untuk menemukan sifat-sifat garis singgung pada lingkaran. Subbab C membahas hubungan lingkaran dan tali busur.

Pemahaman mengenai teorema lingkaran dalam bab ini melanjutkan konsep lingkaran yang sudah pernah dipelajari oleh siswa di sekolah dasar dan sekolah menengah pertama. Perbedaannya, pemahaman lingkaran di jenjang ini bersifat lebih formal dan lebih menekankan pada pembuktian.

Skema Pembelajaran

Subbab	Waktu (JP)*	Tujuan	Pokok Materi	Kosakata	Metode dan Aktivitas
A. Lingkaran dan Busur Lingkaran	4	• Memahami hubungan sudut keliling yang menghadap pada busur yang sama • Memahami hubungan antara sudut pusat dan sudut keliling yang menghadap pada busur yang sama • Menerapkan teorema lingkaran dalam menyelesaikan permasalahan yang terkait	Sudut Keliling dan Sudut Pusat	• Sudut Pusat • Sudut Keliling • Busur	• Discovery Learning
B. Lingkaran dan Garis Singgung	4	• Membuktikan teorema yang berhubungan dengan lingkaran • Menemukan sifat-sifat garis singgung pada lingkaran	• Garis Singgung Lingkaran • Garis Singgung dari Titik Luar	• Garis Singgung • Titik Singgung	Discovery Learning

Subbab	Waktu (JP)*	Tujuan	Pokok Materi	Kosakata	Metode dan Aktivitas
C. Lingkaran dan Tali Busur	4	• Memahami hubungan antara tali busur dan ukuran busur • Membuktikan teorema yang berhubungan dengan lingkaran dan tali busur	• Segiempat Tali Busur • Teorema Ptolemeus	• Tali Busur • Segiempat Tali Busur • Apotema	Discovery Learning

Catatan:

* Waktu merupakan saran rentang jam pelajaran. Guru dapat menyesuaikan dengan kondisi aktual pembelajaran.

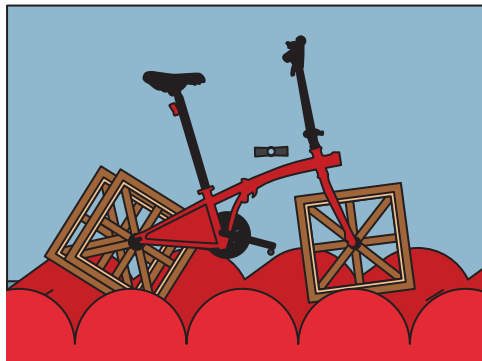
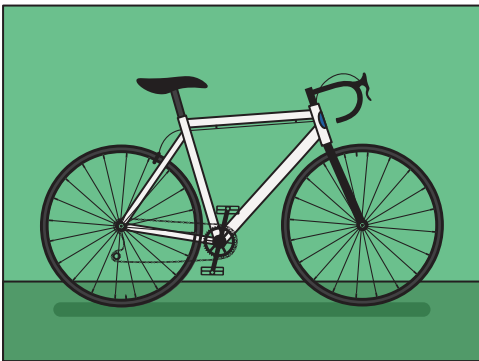
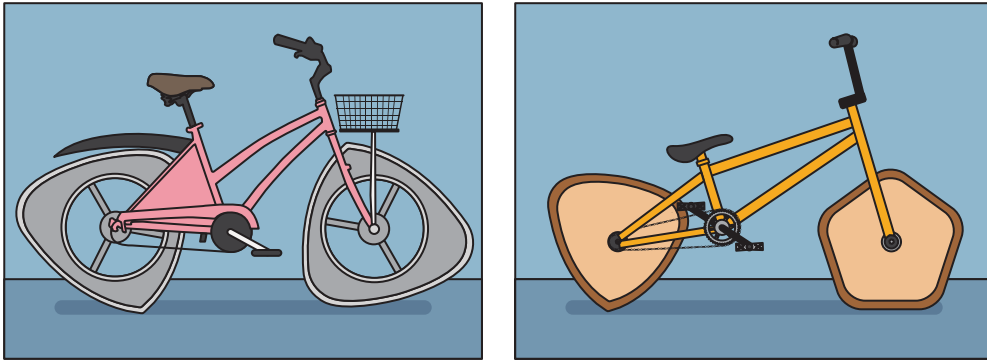
Panduan Pembelajaran

A. Lingkaran dan Busur Lingkaran

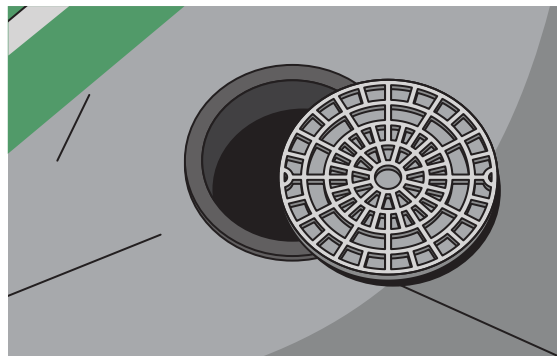
Sebelum memasuki materi mengenai Lingkaran dan Busur Lingkaran, guru diharapkan dapat menjelaskan pengalaman belajar yang akan didapat siswa setelah mempelajari bab ini.

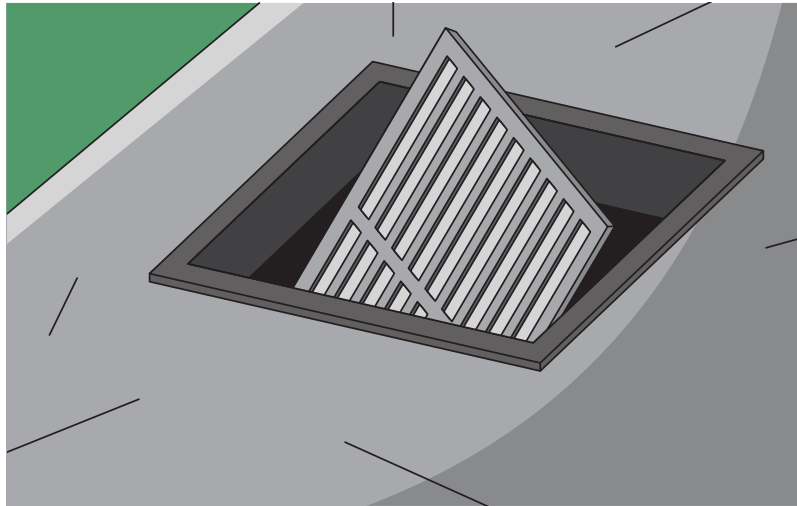
Setelah mempelajari bab ini, siswa dapat

- memahami hubungan sudut keliling yang menghadap pada busur yang sama;
- memahami hubungan antara sudut pusat dan sudut keliling yang menghadap pada busur yang sama; dan
- menerapkan teorema lingkaran dalam menyelesaikan permasalahan yang terkait.

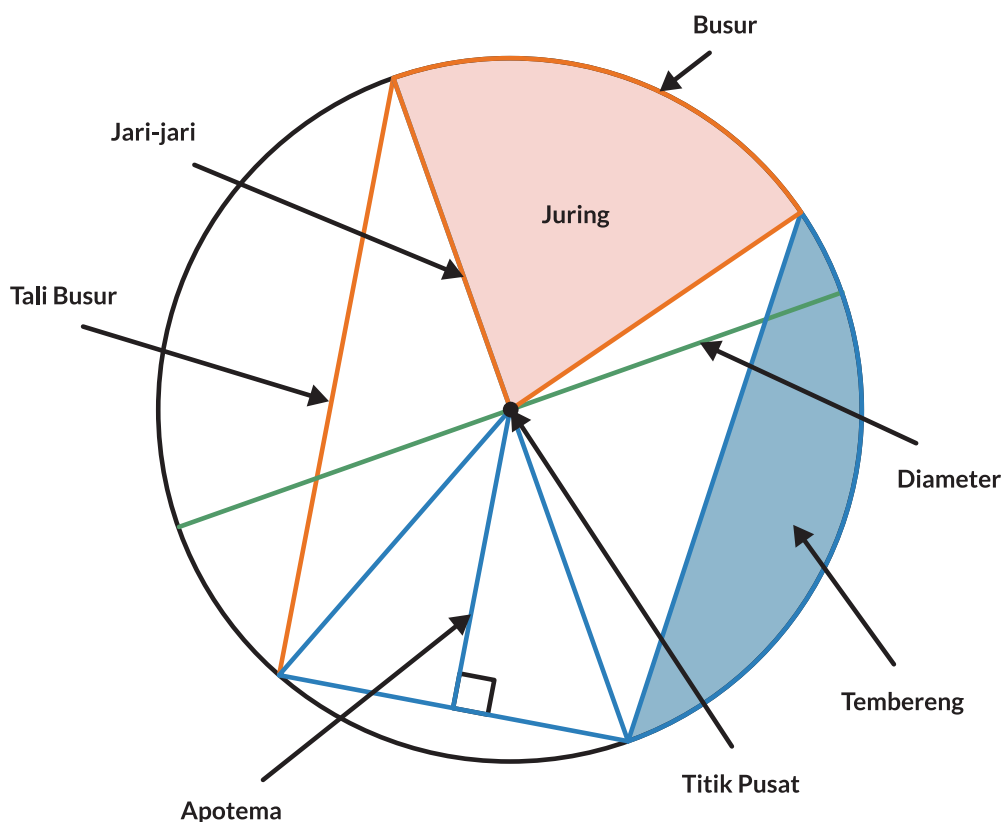
- Kertas
- Jangka
- Busur derajat
- Penggaris

Gambar 2.1 Sepeda dengan Berbagai Bentuk Roda

Perkenalkan bab ini dengan mengajak siswa melihat gambar pembuka bab dan menanyakan kepada siswa apakah pernah melihat benda yang ada pada gambar, dan di mana ditemukan benda tersebut. Gambar tersebut merupakan wahana permainan berbentuk lingkaran yang berputar.

Kemudian ajak siswa melihat Gambar 2.1 dan meminta mereka membayangkan bagaimana rasanya mengendarai masing-masing sepeda yang terlihat pada gambar. Setiap titik pada lingkaran jaraknya sama dari pusat lingkaran. Roda sepeda berbentuk lingkaran. Setiap titik pada ban sepeda jaraknya sama dari poros roda. Jika rangka sepeda terhubung pada poros roda, maka saat roda berputar, rangka (dan juga sadel sepeda) selalu berada pada jarak yang sama dari permukaan jalan. Sehingga pengendara (yang duduk pada sadel) selalu berada pada jarak yang sama dari permukaan jalan. Roda sepeda yang bentuknya lingkaran adalah yang paling nyaman digunakan untuk berkendara di jalanan yang rata.

Gambar 2.2 Penutup Lubang Selokan

Jawaban: Jika tutup berbentuk persegi atau persegi panjang, tutup bisa terjatuh ke dalam lubang dan membahayakan pekerja yang sedang bekerja di dalamnya.

Untuk bentuk bangun datar lain, selalu ada bagian yang lebih panjang dari sisi bangun datar sehingga ada kemungkinan penutup dapat jatuh dan menimpa pekerja yang berada di bawahnya. Lingkaran memiliki diameter yang sama panjangnya sehingga tutupnya tidak mungkin jatuh ke dalam lubang.

Bagian ini bersifat opsional. Guru dapat meminta siswa membaca bagian ini untuk menambah pengetahuan matematika dari perspektif historisnya, sekaligus juga mengembangkan keterampilan literasi membaca.

Gunakan bagian **Mengingat Kembali** mengenai pengertian lingkaran yang sudah dipelajari di SD dan SMP. Guru dapat meninjau kembali lingkaran dan elemen-elemen yang berkaitan dengan lingkaran dengan menampilkan gambar berikut, dan meminta siswa menjelaskan setiap elemen, atau siswa diberikan elemen-elemen dan definisinya secara acak dan meminta siswa untuk memasangkannya.

1. Apotema: jarak dari pusat lingkaran ke tali busur
2. Busur: bagian dari lingkaran
3. Diameter: tali busur yang melewati pusat lingkaran
4. Jari-jari: ruas garis yang menghubungkan pusat lingkaran ke sebuah titik pada lingkaran
5. Juring: daerah yang dibatasi dua jari-jari dan sebuah busur
6. Tali Busur: ruas garis yang menghubungkan dua titik pada lingkaran
7. Tembereng: daerah yang dibatasi oleh tali busur dan busur
8. Titik Pusat: titik yang berada di pusat lingkaran

Gambar 2.3 Mercusuar

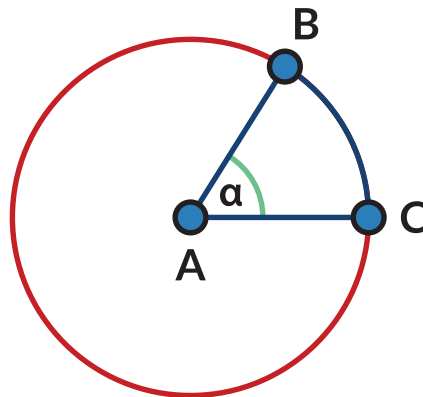
Mulailah aktivitas pembelajaran dengan menanyakan siswa apakah mereka pernah melihat sebuah mercusuar dan tahu apa fungsinya. Jika tidak ada siswa yang pernah mendengar atau mengetahui tentang mercusuar dan fungsinya, guru dapat memberikan penjelasan. Guru dapat menunjukkan video melalui tautan atau QR code berikut ini.

https://www.youtube.com/watch?v=xxX36GEAJn4

Minta siswa untuk melakukan Eksplorasi 2.1. Eksplorasi ini dapat dilakukan secara individu atau berpasangan. Melalui pendekatan *Discovery Learning* dalam eksplorasi ini siswa diharapkan menemukan sifat dari sudut keliling

dari busur yang sama serta hubungan antara sudut pusat dan sudut keliling. Guru juga diharapkan menuntun siswa untuk melakukan pembuktian terhadap apa yang ditemukan.

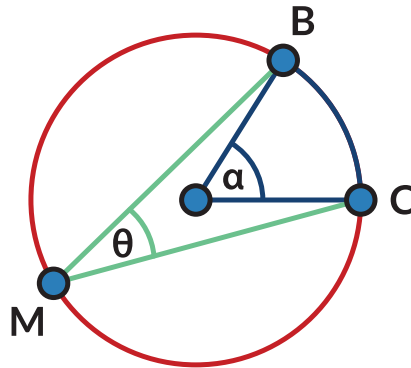
Eksplorasi 2.1

Sebelum memulai Eksplorasi 2.1, guru menjelaskan terlebih dahulu istilah busur lingkaran dan pengertiannya, sebagaimana terdapat pada Buku Siswa berikut. Guru memastikan siswa dapat mengidentifikasi busur minor dan busur mayor secara formatif sebelum melakukan eksplorasi. Guru juga memperkenalkan sudut pusat dan sudut keliling.

Bagian dari lingkaran disebut busur lingkaran. Busur yang lebih kecil disebut busur minor (pada gambar berwarna biru) dan bagian yang lebih besar disebut busur mayor (berwarna merah).

Jika hanya disebutkan kata busur, maka yang dimaksud adalah busur minor.

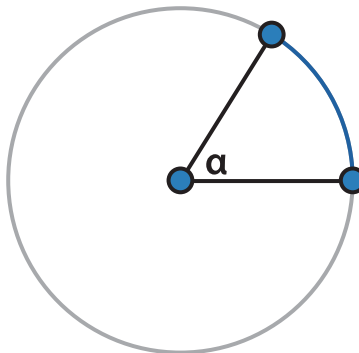
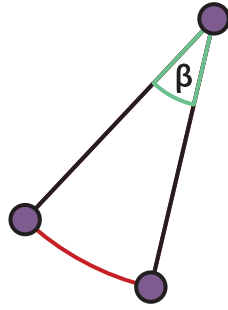
Busur BC dituliskan $\overset{\frown}{BC}$. Besarnya busur $\overset{\frown}{BC}$ ditentukan oleh besarnya $\angle BAC = \alpha$ (Titik A adalah pusat lingkaran).

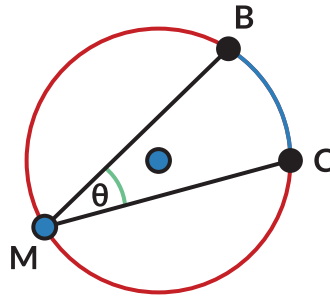
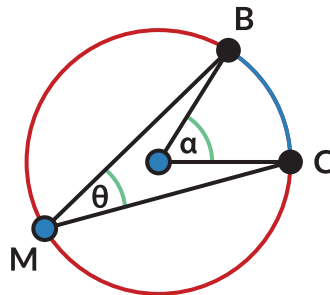
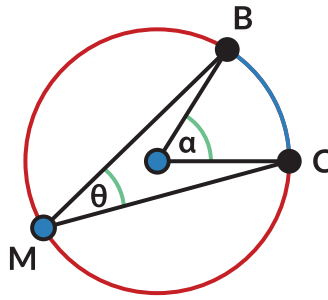
Dalam matematika,

- Sudut α disebut sudut pusat yang menghadap pada $\overset{\frown}{BC}$. Sudut pusat adalah sudut yang titik sudutnya terletak pada pusat lingkaran dan kaki-kaki sudutnya adalah jari-jari lingkaran.

- Sudut θ disebut sudut keliling yang menghadap pada $\widehat{BC}$.
- Sudut keliling adalah sudut yang titik sudutnya terletak pada lingkaran dan kaki-kaki sudutnya berupa tali busur.

Apakah kalian ingat apa yang dimaksud tali busur? Tali busur adalah ruas garis yang menghubungkan dua titik pada lingkaran.

Guru memulai Eksplorasi 2.1 yang ada di Buku Siswa dengan membacakan atau meminta salah satu siswa membacakan permasalahannya.

Sebuah kolam berbentuk lingkaran. Pada salah satu bagian kolam ada perosotan. Pengelola ingin meletakkan lampu sehingga daerah perosotan selalu terang. Jika daerah yang ingin diterangi ditampilkan sebagai busur lingkaran berwarna biru. Busur lingkaran tersebut besarnya α.

Setiap lampu yang diproduksi oleh pabrik Q dapat menyinari daerah dengan jarak tertentu dan sudut penyinaran tertentu (β).

Jika semua lampu yang ada dalam gudang pengelola kolam dapat menyinari jarak yang dibutuhkan, bantulah pengelola taman memilih sudut penyinaran yang tepat.

1. Lampu taman dengan sudut penyinaran 30° diletakkan pada titik M dan dapat menerangi perosotan pada $\widehat{BC}$. Di mana saja pengelola dapat memasang lampu yang sama dan tetap menyinari perosotan pada $\widehat{BC}$?

2. Jika lampu diletakkan di pusat kolam dan ingin menyorot $\widehat{BC}$, apakah lampu dengan sudut penyinaran 30° dapat digunakan? Jika tidak, berapa sudutnya?

3. Jika ukuran perosotan berubah ($\widehat{BC}$) bagaimana pengaruhnya terhadap perubahan sudut penyinaran yang dibutuhkan?

Guru memastikan semua siswa sudah memahami konteks permasalahannya dengan cara meminta beberapa siswa menjelaskan kembali konteks atau menggunakan strategi *Think-Pair-Share*, yaitu setiap siswa diminta untuk membaca dan memahami masalah, kemudian berpasangan dan secara bergiliran menjelaskan masalahnya, kemudian guru meminta beberapa pasang untuk menjelaskan masalah kepada seluruh kelas.

Tahap ini penting dilakukan untuk membiasakan siswa membaca masalah secara teliti, dan memahami apa yang menjadi inti permasalahan, serta memilah informasi apa yang penting dan relevan. Strategi ini juga melatih kemampuan literasi membaca dari siswa.

Aktivitas ini sebaiknya dilakukan secara berkelompok, khususnya jika tidak menggunakan teknologi. Dengan teknologi pun, ada baiknya siswa diberi kesempatan berdiskusi dengan teman kelompoknya. Alternatif 1, setiap kelompok mengerjakan ketiga soal tersebut. Setelah selesai baru membahas secara bersamaan. Alternatif 2, kelompok yang berbeda dapat diberikan pertanyaan yang berbeda karena masing-masing pertanyaan tidak berkaitan secara langsung. Artinya, dapat dikerjakan tanpa harus ada urutan tertentu. Untuk alternatif ini, guru dapat melakukan metode pembelajaran kooperatif Jigsaw atau bisa juga masing-masing kelompok mengerjakan dan kemudian mempresentasikan hasilnya.

Alternatif 2 membutuhkan waktu lebih cepat karena setiap kelompok fokus di satu soal, namun dari hasil presentasi dan diskusi bersama mereka tetap akan mendapatkan solusi dua soal lainnya.

Pertanyaan 1

Untuk pertanyaan ini, jika siswa menggunakan teknologi, maka cukup dengan menggeser titik M pada busur lingkaran maka mereka akan menemukan bahwa sudutnya tidak berubah. Artinya tidak masalah di posisi mana mereka letakkan lampunya, asalkan tetap di busur mayor, maka dapat menyoroti perosotan yang berada di busur minor *BC*.

Jika siswa tidak menggunakan teknologi, maka masing-masing siswa menjiplak lingkaran dan menggambar posisi lampu selain di M dan membuat garis ke titik B dan titik C. Mereka kemudian mengukur dengan busur derajat sudut kelilingnya. Hasil siswa kemudian dapat dikumpulkan, pertama di kelompok sehingga siswa dapat mendiskusikan terlebih dahulu, kemudian menyampaikan hasil diskusi dengan guru dan siswa lain di kelas.

Pertanyaan 2

Untuk pertanyaan ini, jika siswa menggunakan teknologi, maka dengan mudah mereka melihat bahwa sudut pusat adalah dua kali sudut keliling. Maka ukuran sudut lampu yang dibutuhkan adalah 60°.

Jika siswa tidak menggunakan teknologi, maka masing-masing siswa menjiplak lingkaran dan mengukur sudut pusat dan mendapatkan hasil adalah 60°.

Pertanyaan 3

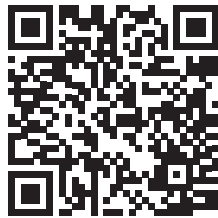
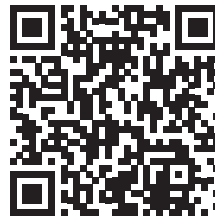
Untuk pertanyaan ini, siswa mencoba menggeser titik B atau titik C serta titik M untuk melihat hubungan antara sudut pusat dan sudut keliling. Hasilnya adalah menguatkan apa yang dihasilkan di soal pertanyaan 1 dan 2, bahwa sudut pusat selalu dua kali dari sudut keliling dan hubungan ini berlaku untuk semua titik yang membentuk sudut keliling selama masih pada busur mayor.

Diferensiasi

Ayo Menggunakan Teknologi

Jika tersedia, disarankan menggunakan aplikasi semacam *GeoGebra* atau *Desmos*. Eksplorasi lebih mudah dilakukan dengan menggunakan teknologi seperti di bawah ini.

https://www.geogebra.org/m/cjdyK8UR#material/UT4sXfYW

https://www.geogebra.org/m/cjdyK8UR#material/VGNfTTEu

Ayo Bekerja Sama

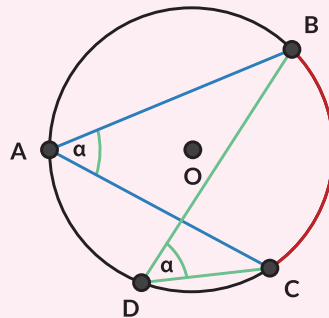
Jika terbatas akses teknologi, eksplorasi tetap dapat dilakukan secara berkelompok. Setiap siswa dapat menyelidiki gambar yang berbeda dan kemudian mendiskusikan hasilnya secara berkelompok dan bersama-sama dengan seluruh siswa.

Ayo Bereksplorasi

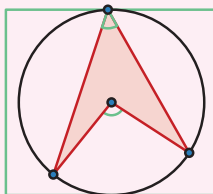
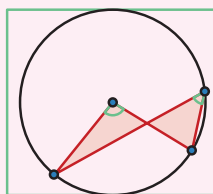
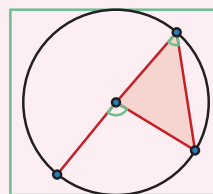
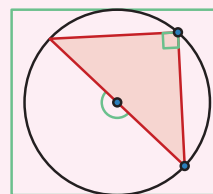
Setelah diskusi kelompok dan diskusi kelas, guru dapat menyimpulkan hasil temuan.

- Sudut pusat besarnya dua kali sudut keliling yang menghadap ke busur lingkaran yang sama.
- Sudut keliling yang menghadap ke busur yang sama besarnya sama.
- Sudut keliling yang menghadap ke diameter besarnya siku-siku.

Miskonsepsi

Siswa sering kali tidak selalu mengetahui sudut mana yang sama pada Gambar 2.4 Ini terutama disebabkan karena mereka tidak menyadari bahwa segitiga yang terbentuk sebangun dan mereka tidak mencari sudut yang terletak pada **busur yang sama**. Guru sebaiknya menekankan kesebangunan dan busur mana yang membentuk sudut keliling.

Gambar 2.4 Sudut Keliling yang Menghadap pada Busur yang Sama

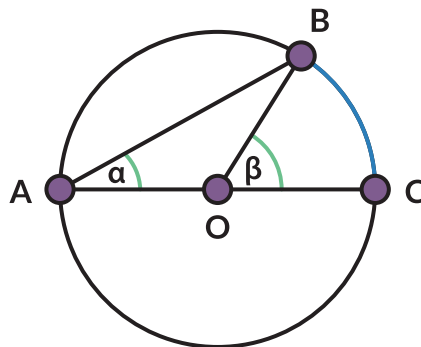
Miskonsepsi

Salah satu miskonsepsi siswa dalam pemahaman mengenai sudut pusat dan sudut lingkaran adalah siswa tidak menyadari bahwa ada empat kasus yang perlu dipertimbangkan. Kasus 4 sering kali disampaikan sebagai teorema tersendiri, tetapi sebaiknya siswa melihatnya sebagai kasus khusus dari teorema utama mengenai sudut pusat dan sudut keliling.

Gambar 2.5 Miskonsepsi mengenai Sudut Pusat dan Sudut Lingkaran

Siswa sering kali tidak selalu mengetahui sudut mana yang sama pada Gambar 2.5 diatas, terutama disebabkan karena mereka tidak menyadari bahwa segitiga yang terbentuk sebangun dan mereka tidak mencari sudut yang terletak pada **busur yang sama**. Guru sebaiknya menekankan kesebangunan dan busur mana yang membentuk sudut keliling.

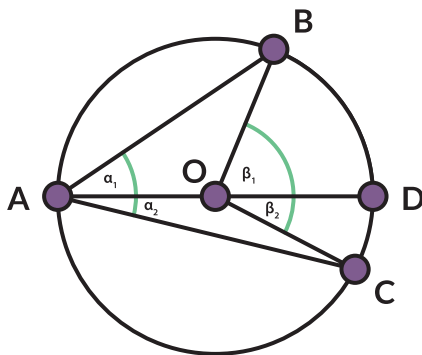
Bagian Pembuktian menjadi penting untuk memastikan siswa menghindari miskonsepsi di atas. Guru membacakan skenario Rani dan Nyoman dan mendorong siswa untuk melakukan diskusi di dalam kelompok untuk keempat kasus yang dibicarakan oleh Rani dan Nyoman. Guru dapat menggunakan pendekatan pembelajaran kooperatif dengan menggunakan metode *Within Team Jigsaw*, yaitu setiap kelompok terdiri dari 4 siswa dan masing-masing siswa bertanggung jawab untuk mempelajari satu dari empat kasus yang ada dan menjelaskan kepada anggota kelompok lainnya. Karena kasus ketiga diberikan sebagai soal latihan, guru dapat memberikan jawaban terlebih dahulu kepada anggota kelompok yang bertanggung jawab untuk kasus ketiga, atau jika siswa memiliki kemampuan yang baik (dapat juga dipilih siswa yang memiliki kemampuan baik), dapat mengerjakan terlebih dahulu sebelum diskusi. Berikan waktu siswa mempelajari kasus-kasus sebelum kemudian mereka saling menjelaskan.

- **Kasus 1**

  Pertama-tama perhatikan kasus khusus saat $\overline{AC}$ melalui titik O.

Bukti:

panjang $\overline{OA}$ = panjang $\overline{OB}$	(jari-jari lingkaran) maka $\triangle AOB$ sama kaki.
$\angle OAB = \angle OBA$	(karena $\triangle AOB$ sama kaki)
$\angle AOB = 180 - 2\alpha$ ....(1)	(jumlah sudut dalam $\triangle AOB$ adalah 180°)
$\angle AOB = 180 - \beta$ ....(2)	($\angle AOB$ adalah pelurus $\angle BOC$)
$\beta = 2\alpha$	Gabungkan (1) dan (2) untuk membuktikan.

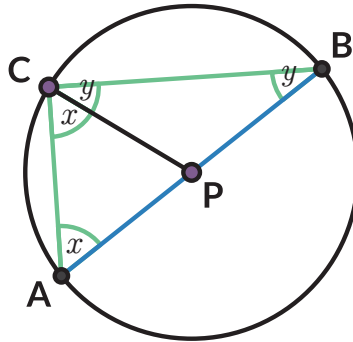
- **Kasus 2**

  Sekarang perhatikan kasus yang lebih umum, saat $\overline{AC}$ tidak melalui pusat lingkaran.

Tarik $\overline{AD}$ melalui titik O, membelah α menjadi $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

Dengan cara yang sama dengan Kasus 1	$\beta_1 = 2\alpha_1$	......(1)
Dengan cara serupa	$\beta_2 = 2\alpha_2$	......(2)
Gunakan (1) dan (2)	$\beta = \beta_1 + \beta_2$	
	$= 2\alpha_1 + \alpha_2$	

- **Kasus 3** Lihat jawaban untuk Latihan 2.1 no. 1.
- **Kasus 4**

  Kasus 4 adalah kasus khusus untuk sudut keliling yang menghadap pada diameter lingkaran ($\angle ACB$).

Bukti:

1) Gambarkan jari-jari $\overline{PC}$. Segitiga jenis apakah $\triangle APC$ dan $\triangle BPC$? Bagaimana kalian tahu?

   $\triangle APC$ dan $\triangle BPC$ adalah segitiga sama kaki karena kedua sisi merupakan jari-jari lingkaran sehingga sama besarnya.

2) Nyatakan besarnya sudut-sudut yang sama pada $\triangle APC$ sebagai x° dan besarnya sudut-sudut yang sama pada $\triangle BPC$ sebagai y°, tuliskan sudut-sudut pada $\triangle ABC$ dalam x° dan y°.

   a. $\angle A = x^\circ$

   b. $\angle B = y^\circ$

   c. $\angle C = x^\circ + y^\circ$

3) Apa yang kalian ketahui tentang sudut-sudut pada segitiga yang dapat digunakan untuk menentukan besarnya $\angle ACB$?

$$\angle ACB = 180^\circ - (x^\circ + y^\circ)$$
$$(x^\circ + y^\circ) = 180^\circ - (x^\circ + y^\circ)$$
$$2(x^\circ + y^\circ) = 180^\circ$$
$$(x^\circ + y^\circ) = 90^\circ$$

Untuk siswa yang sudah menyelesaikan bagiannya dapat membaca informasi tambahan sejarah dari Thales.

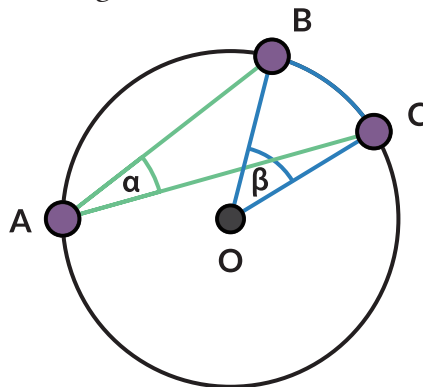
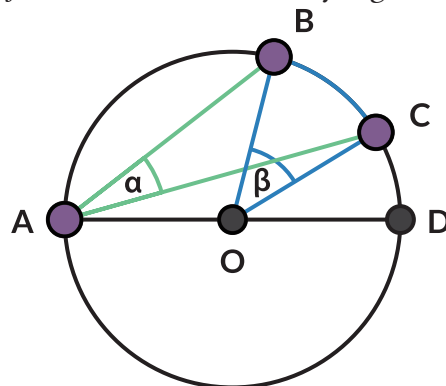
Setelah semua kelompok Jigsaw selesai melakukan eksplorasi dan menjawab keempat kasus, berikan waktu untuk setiap kelompok mempresentasikan dan mendiskusikan hasilnya, dimulai dari kasus 1 sampai

kasus 4. Dalam diskusi, pastikan ketika kelompok mempresentasikan masing-masing kasus, siswa dari kelompok lain memahami setiap langkah pembuktian dan alasannya. Pada pembahasan kasus 4, guru mengarahkan siswa memahami kasus khusus dari hubungan sudut pusat dan sudut keliling, yaitu kasus untuk sudut keliling yang menghadap diameter dan disebut Teorema Thales:

> Jika tiga titik A, B, C terletak pada lingkaran dan $\overline{AB}$ adalah diameter, maka $\angle ACB$ siku-siku.

Jawaban Latihan 2.1

1. Ini bukti Kasus 3 dalam Eksplorasi 2.1.

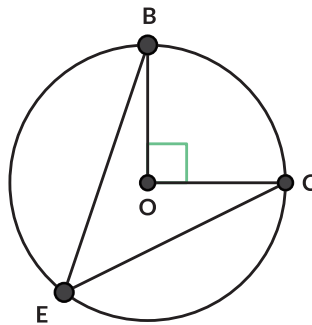
   a. Gambarkan sudut pusat yang menghadap ke busur yang sama dengan sudut keliling $\angle BAC$.

   b. Apakah pada lingkaran berikut juga berlaku bahwa sudut pusat besarnya dua kali lipat sudut keliling? Buktikan.
   Petunjuk: Buatlah diameter yang melalui titik A dan titik O.
   Sesuai petunjuk, buat $\overline{AD}$ diameter yang melalui A dan O

Amati bahwa $\alpha = \angle BAD - \angle CAD$ dan $\beta = \angle BOD - \angle COD$

Relasi $\angle CAD$ dan $\angle COD$ telah dibuktikan pada Kasus 1, yaitu $\angle COD = 2\angle CAD$.

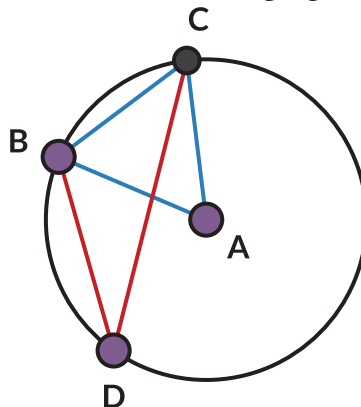
$\angle COD = 2\angle CAD$ berdasarkan Kasus 1.

Maka

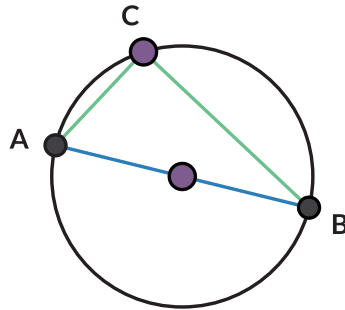
$$\begin{aligned}\beta &= \angle BOD - \angle COD \\ &= 2\angle BAD - 2\angle CAD \\ &= 2(\angle BAD - \angle CAD) \\ &= 2\alpha\end{aligned}$$

2. Jika $\angle BOC = 90^\circ$, berapakah besar $\angle BEC$?

$$\begin{aligned}\angle BEC &= \frac{1}{2}\angle BOC \\ &= \frac{1}{2} \cdot 90^\circ \\ &= 45^\circ\end{aligned}$$

3. Lingkaran A berjari-jari 2 satuan. Jika panjang $\overline{BC} = 2$, tentukan besar $\angle BDC$.

   $AB = AC = BC = 2$ cm, maka $\triangle ABC$ segitiga sama sisi dan $\angle BAC = 60^\circ$

$\angle BDC$ adalah sudut keliling yang menghadap ke $\overset{\frown}{BC}$ sehingga

$$\begin{aligned}\angle BDC &= \frac{1}{2} \cdot \angle BAC \\ &= \frac{1}{2} \cdot 60^\circ \\ &= 30^\circ\end{aligned}$$

4. $\overline{AB}$ adalah diameter pada lingkaran berikut. Jari-jari lingkaran 8,5 cm dan panjang $\overline{AC}$ = 8 cm. Tentukan:

a. Besar $\angle ACB$

$\angle ACB$ adalah sudut keliling yang menghadap pada diameter $\overline{AB}$ (atau berdasarkan teorema Thales) maka

$$\begin{aligned}\angle ACB &= \frac{1}{2} \cdot 180^\circ \\ &= 90^\circ\end{aligned}$$

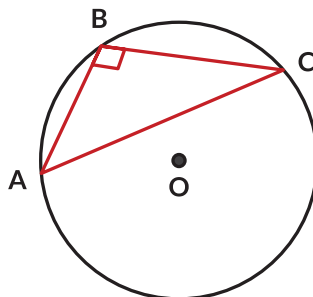
b. Panjang $\overline{AB}$

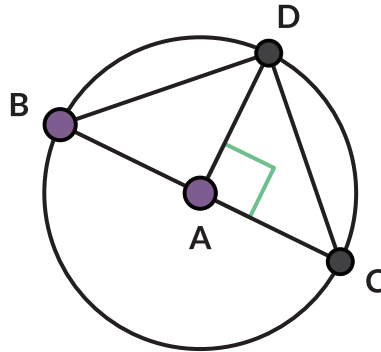
AB adalah diameter maka panjang $AB = 2 \cdot 8{,}5 = 17$ cm

c. Panjang $\overline{BC}$

$\triangle ACB$ adalah segitiga siku-siku panjang $\overline{BC}$ dapat dihitung berdasarkan teorema Pythagoras

$$\begin{aligned}BC^2 &= AB^2 - AC^2 \\ &= 17^2 - 8^2 = 15^2 \\ BC &= 15\text{cm}\end{aligned}$$

5. Apa yang salah pada gambar berikut?

Jika $\angle ABC = 90^\circ$ seharusnya AC adalah diameter lingkaran. Jika AC bukan diameter, maka $\angle ABC \neq 90^\circ$.

6. Lingkaran A berjari-jari 2 cm, tentukan:

a. Besar $\angle BDC$

$\angle BDC$ menghadap pada diameter lingkaran, maka $\angle BDC = 90^\circ$.

b. Jika $\angle CAD = 90^\circ$, tentukan besar $\angle ACD$.

$AB = AC = 2$ dan $BC \perp DA$ maka $\triangle DBC$ adalah segitiga sama kaki

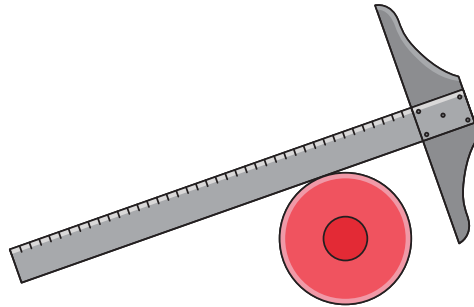
$$\begin{aligned} \angle ACD = \angle DCB &= \angle DBC \\ &= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BDC) \\ &= \frac{1}{2}(180^\circ - 90^\circ) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 90^\circ \\ &= 45^\circ \end{aligned}$$

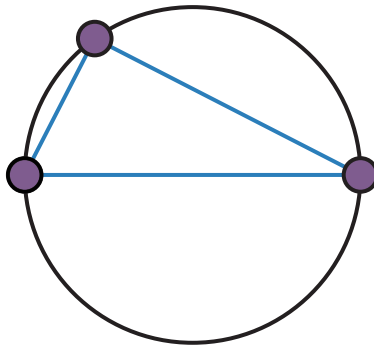
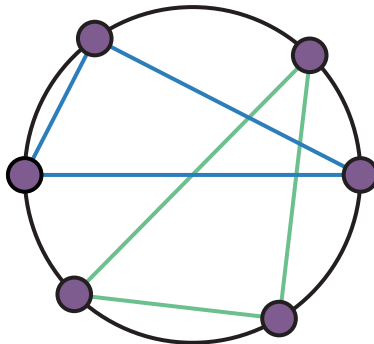
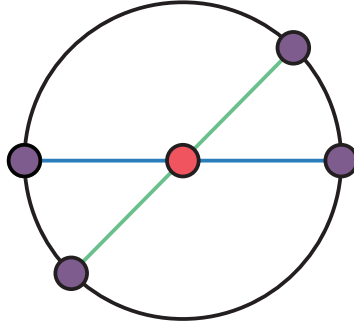
c. Panjang $\overline{CD}$

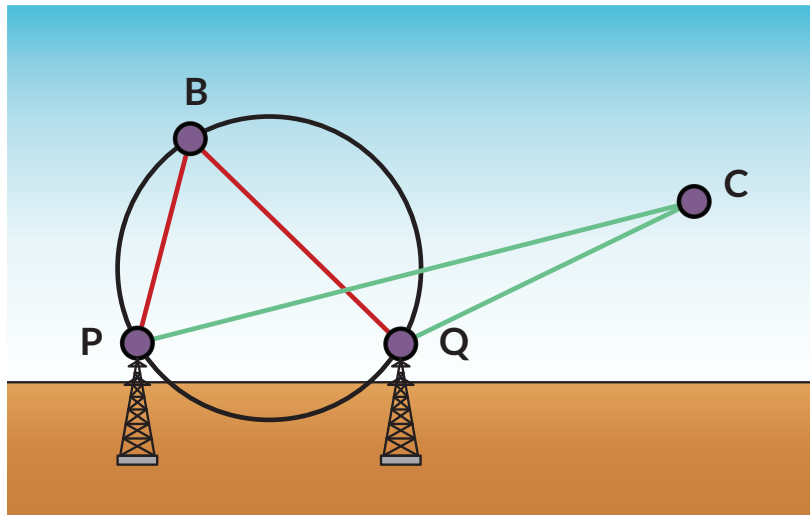
$AC = AD = 2$ dan besar $\angle CAD = 90^\circ$ maka $\triangle ACD$ adalah segitiga siku-siku sama kaki. Panjang $\overline{CD}$ dapat dihitung dengan teorema Pythagoras (alternatif: memanfaatkan perbandingan trigonometri).

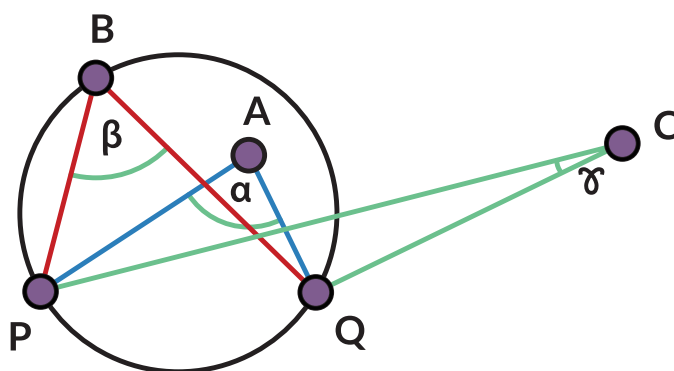
$CD = 2\sqrt{2}$ cm.

7. **Ayo Berpikir Kreatif**

Jelaskan cara memanfaatkan alat gambar teknik berbentuk T ini untuk menentukan letak titik pusat piring.

Alat gambar teknik berbentuk T memiliki sudut siku-siku. Berdasarkan teorema Thales, kita tahu bahwa menempatkan sudut siku-siku pada tepi lingkaran, maka sudut siku-siku itu menghadap pada diameter.

a. Letakkan sudut siku-siku pada tepi piring, gambarkan segitiga siku-siku. Sisi miringnya adalah diameter lingkaran.

b. Ulangi langkah tersebut untuk mendapatkan diameter lingkaran yang lain.

c. Kedua diameter berpotongan di pusat lingkaran.

8. **Ayo Berpikir Kritis**

Pada gambar berikut, titik P dan titik Q adalah mercusuar. Daerah dengan karang berbahaya telah dipetakan dan lingkaran menyatakan daerah berbahaya tersebut. Kapal diharapkan tidak memasuki daerah lingkaran untuk menghindari kemungkinan kandas.

Pelajari sudut yang dibentuk antara cahaya dari kedua mercusuar ($\angle PCQ$) jika kapal berada di luar lingkaran/pada lingkaran/di dalam lingkaran. Menurutmu, informasi apa yang perlu diketahui kapten kapal tentang lokasi ini untuk memastikan kapalnya tidak kandas?

Mari lihat 3 kasus:

a. Kapal berada pada lingkaran.

Titik B terletak pada lingkaran. Sudut β dibentuk antara kapal dengan masing-masing mercusuar, merupakan sudut keliling yang menghadap ke $\overset{\frown}{PQ}$.

b. Kapal berada di dalam lingkaran.

Titik A terletak di dalam lingkaran. Sudut α dibentuk antara kapal dengan masing-masing mercusuar.

$\alpha > \beta$

c. Kapal berada di luar lingkaran.

Titik C terletak di luar lingkaran. Sudut γ dibentuk antara kapal dengan masing-masing mercusuar.

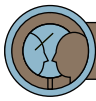
$\gamma < \beta$

Berarti β adalah batas aman. Jika kapten kapal mengetahui besarnya sudut β, kapal dapat berlayar dengan aman dengan menjaga sudut yang dibentuk antara kapal dengan kedua mercusuar selalu kurang dari β.

Rangkuman

Pada akhir dari pembelajaran Bagian A. Lingkaran dan Busur Lingkaran, guru merangkum apa yang sudah dipelajari, yaitu:

Sifat-sifat sudut pada lingkaran:

1. Sudut keliling yang menghadap pada busur yang sama, besarnya sama.
2. Sudut pusat besarnya dua kali sudut keliling yang menghadap pada busur yang sama.
3. Sudut keliling yang menghadap pada diameter lingkaran adalah sudut siku-siku.

Ajak siswa untuk refleksi diri dengan menjawab pertanyaan berikut. Siswa dapat menuliskannya dalam buku jurnal refleksi dan minta mereka memberikan bukti atau contoh pemahaman mereka.

1. Apakah saya memahami hubungan sudut keliling dan busur lingkaran?
2. Apakah saya memahami hubungan sudut keliling dan sudut pusat?
3. Apakah saya bisa mengerjakan soal-soal yang terkait dengan sudut keliling dan sudut pusat lingkaran?

B. Lingkaran dan Garis Singgung

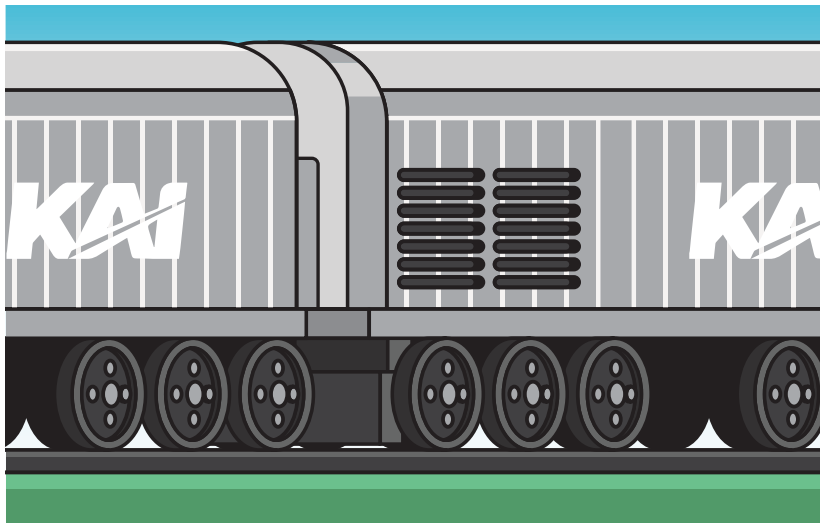
Sebelum memasuki materi mengenai Lingkaran dan Garis Singgung, guru diharapkan dapat menjelaskan pengalaman belajar yang akan didapat siswa setelah mempelajari bab ini.

Setelah mempelajari bab ini, siswa dapat

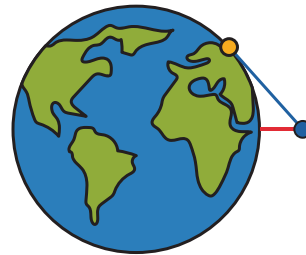
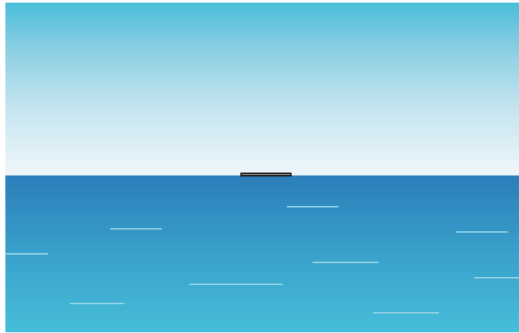
- membuktikan teorema yang berhubungan dengan lingkaran; dan
- menemukan sifat-sifat garis singgung pada lingkaran.

Sarana & Prasarana Pembelajaran

1. Kertas
2. Jangka
3. Busur derajat
4. Penggaris

Perkenalkan subbab ini dengan mengajak siswa memperhatikan gambar roda kereta api dan rel kereta api sebagai contoh konkret dari garis singgung dan titik singgung.

Gambar 2.6 Roda Kereta Api

Guru dapat menampilkan video berikut ini yang menceritakan aplikasi dari garis singgung dalam menentukan jarak ke cakrawala.

Minta siswa untuk melakukan Eksplorasi 2.2. Ini dapat dilakukan secara individu atau berpasangan atau berkelompok. Melalui pendekatan *Discovery Learning* dalam eksplorasi ini siswa diharapkan menemukan sifat dari garis singgung dari lingkaran Guru juga diharapkan menuntun siswa untuk melakukan pembuktian terhadap apa yang ditemukan.

Eksplorasi 2.2

Gambar 2.7 Cakrawala

Guru memulai eksplorasi dengan membacakan atau meminta siswa membaca permasalahan navigator kapal laut dalam menentukan jarak pelabuhan yang berada pada cakrawala.

Guru memastikan semua siswa sudah memahami konteks permasalahannya dengan cara meminta beberapa siswa menjelaskan kembali konteks atau menggunakan strategi *Think-Pair-Share*, yaitu setiap siswa diminta untuk membaca dan memahami masalah, kemudian berpasangan dan secara bergiliran menjelaskan masalahnya, kemudian guru meminta beberapa pasang untuk menjelaskan masalah kepada seluruh kelas.

Tahap ini penting dilakukan untuk membiasakan siswa membaca masalah secara teliti, dan memahami apa yang menjadi inti permasalahan, dan memilah informasi apa yang penting dan relevan. Strategi ini juga melatih kemampuan literasi membaca dari siswa.

Berikan kesempatan siswa untuk bertanya untuk mengklarifikasi permasalahan.

Diskusikan pertanyaan pertama bersama dengan siswa. Kemudian minta siswa mengukur sudut yang terbentuk antara garis singgung dan jari-jari lingkaran. Seharusnya siswa tidak akan menemukan masalah dan mendapatkan bahwa sudutnya siku-siku. Minta siswa untuk konfirmasi apakah ini kebetulan saja atau memang berlaku untuk semua garis singgung. Siswa dapat melakukan dengan bantuan teknologi atau melakukan secara manual dengan menggambar berbagai garis singgung dan mengukur sudut yang terbentuk dengan jari-jari.

Ayo Menggunakan Teknologi

Gunakan aplikasi semacam *GeoGebra* atau *Desmos*.

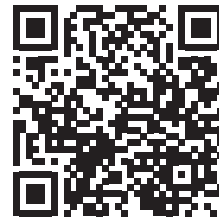
Minta siswa untuk mencoba apakah mungkin garis singgung tidak siku-siku dengan jari-jari dengan mencoba soal nomor 2. Siswa akan menemukan bahwa jika tidak siku-siku maka pasti akan memotong lingkaran di dua titik, dan ini disebut garis sekan.

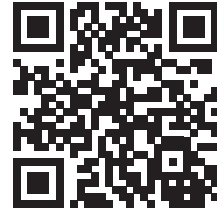
Pertanyaan 3-5. Siswa diharapkan dapat melihat bahwa dapat dibuat dua garis singgung dari sebuah titik di luar lingkaran, yaitu $\overline{PB}$ dan $\overline{PC}$, dan keduanya memiliki panjang yang sama.

Catatan: yang dimaksud sebagai panjang garis singgung adalah panjang ruas garis *PB* atau ruas garis *PC*.

Untuk pertanyaan 6, guru dapat melihat referensi dari tautan berikut untuk menemukan jawaban.

https://www.geogebra.org/m/cjdyK8UR#material/u6Ev7bHg

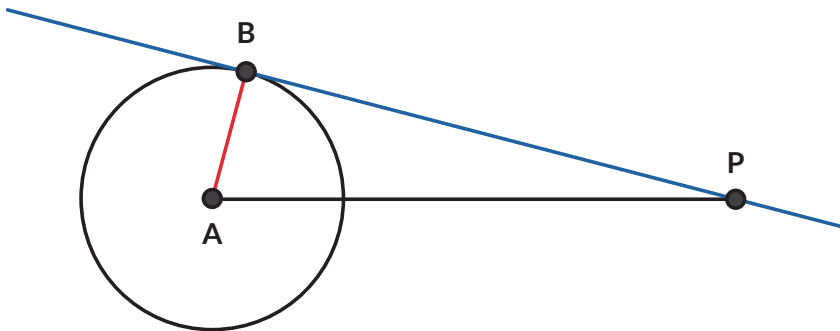
https://www.spaceacademy.net.au/library/notes/horizons.htm

Ayo Menggunakan Teknologi

Sebagai alternatif jika ada akses teknologi, guru dapat mengajak siswa menggunakan aplikasi Geogebra berikut ini untuk melakukan eksplorasi garis singgung terhadap lingkaran.

https://www.geogebra.org/m/MZZCtaJq

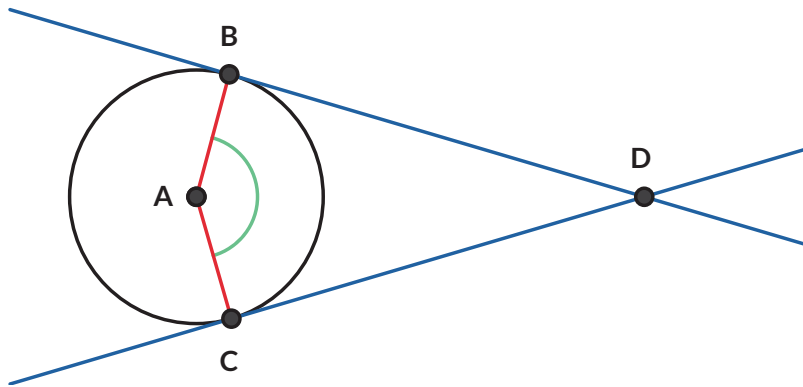
Diferensiasi

Bagi siswa yang kecepatan belajarnya tinggi (*advanced*), minta mereka mengerjakan Latihan tanpa bantuan. Pada saat yang sama, guru dapat mendampingi siswa yang mengalami kesulitan.

Jawaban Latihan 2.2

1. Jika jari-jari lingkaran *A* adalah 7 cm dan titik *P* berjarak 25 cm dari titik *A*. Berapakah panjang garis singgung $\overline{PB}$?

$\triangle ABP$ siku-siku di *B*. Berdasarkan teorema Pythagoras

$$\begin{aligned} PB^2 &= PA^2 - AB^2 \\ &= 25^2 - 7^2 \\ &= 24^2 \\ PB &= 24 \text{ cm} \end{aligned}$$

2. Pada gambar berikut, $\overline{BD}$ dan $\overline{CD}$ adalah garis singgung lingkaran *A*. Jika $\angle BAC = 147°$, tentukan besar $\angle BDC$.

Dalam segiempat, jumlah sudutnya 360°. $\angle BAC = 147°$, $\angle ABD = \angle ACD$ = 90° karena BD dan CD adalah garis singgung lingkaran A.

$\angle BAC + \angle ABD + \angle ACD + \angle BDC = 360°$

$$\angle BDC = 360° - 147° - 90° - 90°$$
$$= 33°$$

3. Ayo Berpikir Kreatif

Bram, seorang navigator kapal laut, tahu bahwa jari-jari lingkaran bumi panjangnya 6.371 km. Ruang kemudi kapal berada pada ketinggian 40 m dari permukaan laut. Tentukan jarak cakrawala yang dapat Bram lihat.

Berdasarkan hasil Eksplorasi 2.2, jarak pandang cakrawala dapat dihitung.

$j^2 = (6.371.000 + 40)^2 - (6.371.000)^2$

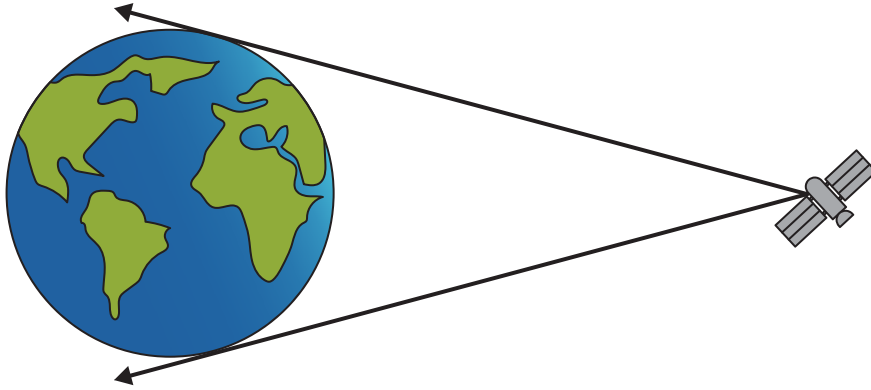
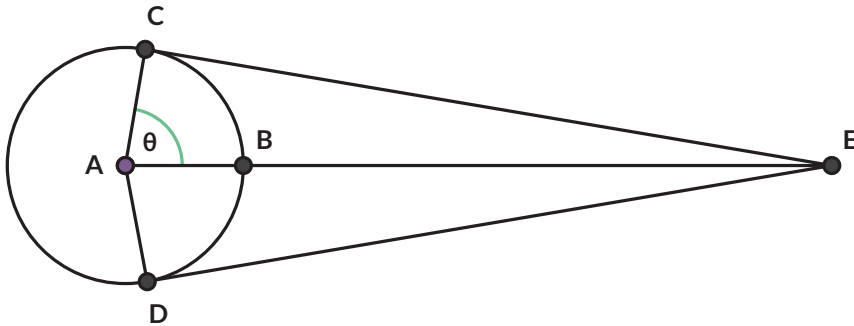
$= 22.576^2$

$j = 22.576$ m

$= 22,576$ km

4.

Satelit komunikasi, mengorbit bumi pada posisi yang tetap terhadap bumi (artinya jika dilihat dari bumi, satelit tersebut akan berada pada ketinggian dan bujur yang sama, meskipun bumi berputar dan

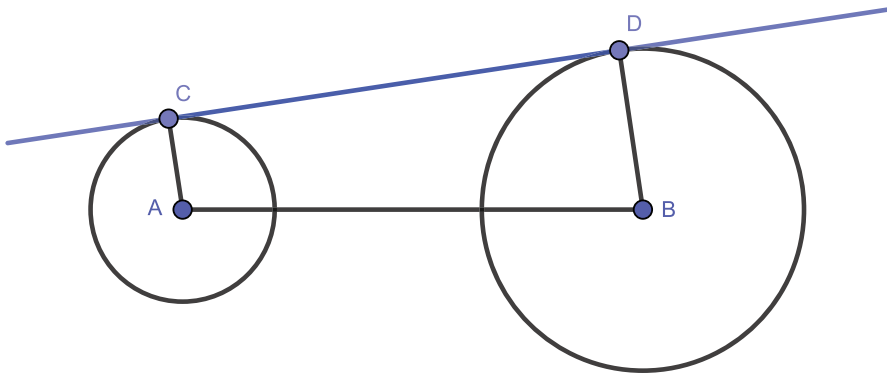
mengelilingi matahari). Satelit Telkom-4 (Merah Putih) mengorbit bumi pada garis bujur 108° BT. Jika jari-jari bumi adalah 6.371 km dan satelit Telkom-4 terletak pada ketinggian 35.786 km dari permukaan bumi, apakah Satelit Telkom-4 dapat memancarkan sinyal ke seluruh wilayah Indonesia?

$AB = AC = AD = 6.371$, $BE = 35.786$

Dengan perbandingan Trigonometri didapat

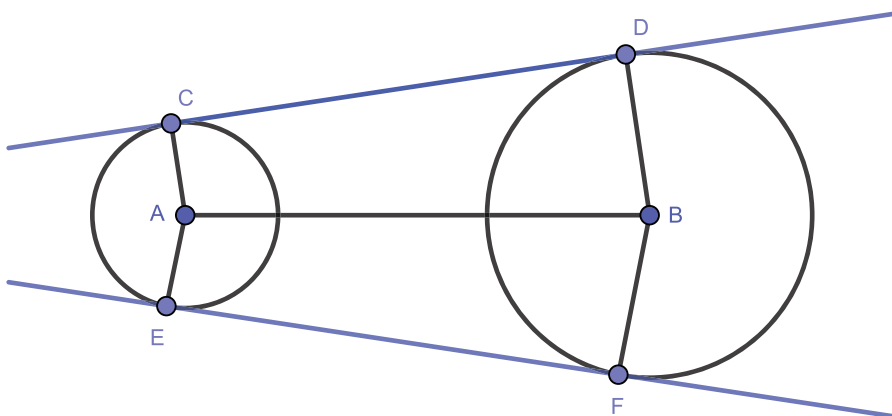
$$\cos\theta = \frac{6.371}{6.371 + 35.786}$$
$$= 0,1511$$
$$\theta = 81,31^\circ$$

Satelit terletak pada 108° BT, artinya jangkauannya dari 108° − 81,31° = 26,69° BT sampai dengan 108° + 81,31° = 189,31° BT (Wilayah Indonesia 95° BT sampai dengan 141° BT).

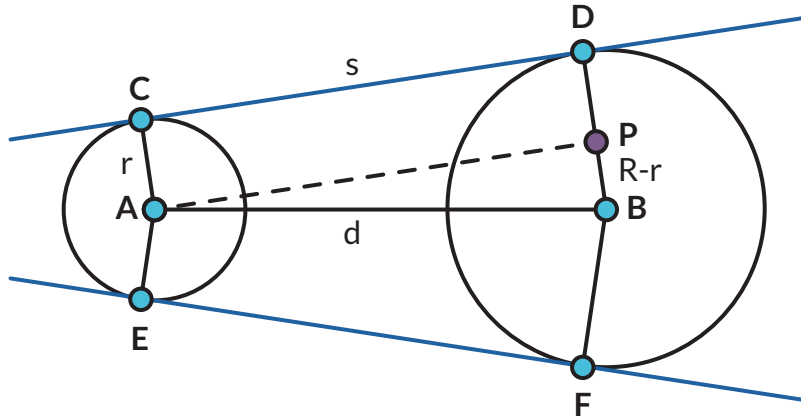
5. Garis singgung persekutuan luar

   Garis singgung persekutuan adalah garis singgung yang merupakan

garis singgung bagi dua lingkaran. Garis $\overline{CD}$ merupakan garis singgung persekutuan luar untuk lingkaran *A* dan lingkaran *B*.

a. Lingkaran *A* dan lingkaran *B* memiliki dua buah garis singgung persekutuan luar. Gambarkan garis singgung persekutuan luar yang lain.

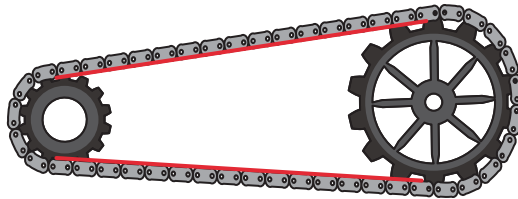
Ada dua garis singgung persekutuan luar, yaitu $\overline{CD}$ dan $\overline{EF}$.

b. Tentukan panjang garis singgung persekutuan luar *CD* (*s*) jika jarak kedua pusat lingkaran (*d*) dan jari-jari masing-masing lingkaran diketahui (*r* dan *R*).

Gambarkan garis bantu sehingga kalian dapat memanfaatkan Teorema Pythagoras.

Gambarkan garis bantu $\overline{AP} \parallel \overline{CD}$.

$\triangle APB$ siku-siku di titik P. Berdasarkan teorema Pythagoras

$$
\begin{aligned}
s^2 &= AP^2 \\
&= AB^2 - BP^2 \\
&= d^2 - (R - r)^2
\end{aligned}
$$

6. Rantai sepeda berfungsi untuk memindahkan daya penggerak dari pedal ke roda.

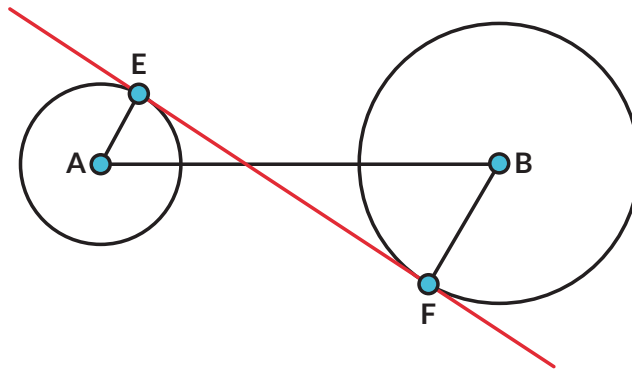
   a. Tunjukkan garis singgung persekutuan luar pada gambar rantai sepeda berikut.

   b. Tentukan panjang garis singgung persekutuan luarnya jika jari-jari lingkaran yang lebih besar = 5 cm, jari-jari lingkaran yang lebih kecil = 3 cm, dan jarak antar kedua pusat lingkaran = 44 cm.

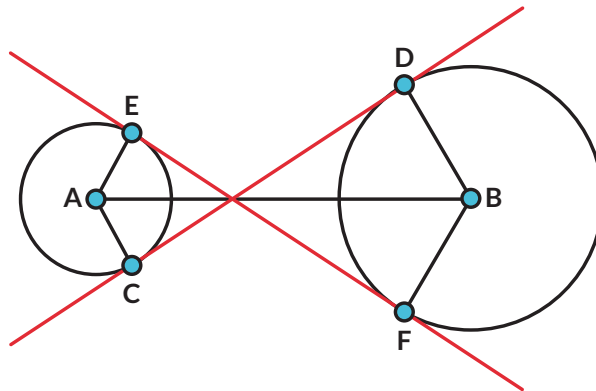
   $R = 5$, $r = 3$, dan $d = 44$ maka garis singgung persekutuan luarnya

   $s^2 = 44^2 - (5 - 3)^2$

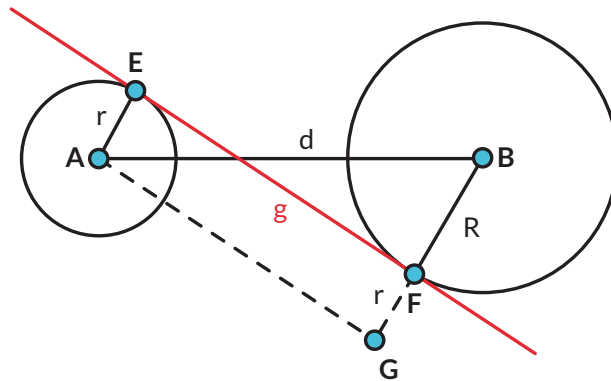
   $s = 43{,}95$ cm

7. Garis singgung persekutuan dalam

   Selain garis singgung persekutuan luar, ada juga garis singgung persekutuan dalam. $\overline{EF}$ merupakan garis singgung persekutuan dalam untuk lingkaran A dan lingkaran B.

a. Lingkaran A dan lingkaran B memiliki dua buah garis singgung persekutuan dalam. Gambarkan garis singgung persekutuan dalam yang lain.

Ada dua garis singgung persekutuan dalam, yaitu $\overline{CD}$ dan $\overline{EF}$.

b. Tentukan panjang garis singgung persekutuan dalam $\overline{EF}$ (g) jika jarak kedua pusat lingkaran (d) dan jari-jari masing-masing lingkaran diketahui (r dan R).

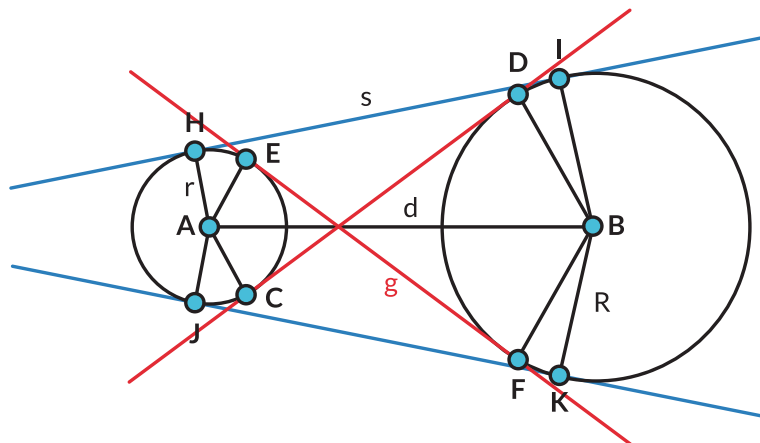
Gambarkan garis bantu sehingga kalian dapat memanfaatkan Teorema Pythagoras.

Gambarkan garis bantu $\overline{AG} \parallel \overline{EF}$

$\triangle AGB$ siku-siku di titik G, menurut teorema Pythagoras

$$g^2 = AG^2$$
$$= AB^2 - BG^2$$
$$= d^2 - (R + r)^2$$

8. Dua buah lingkaran, pusatnya berjarak 5 cm. Jika kedua lingkaran tersebut masing-masing berjari-jari 1 cm dan 2 cm: $d = 5$, $r = 1$, $R = 2$

   a. Gambarkan kedua lingkaran dengan ukuran sebenarnya, juga semua garis singgung persekutuan kedua lingkaran.

   Pada gambar berikut, garis singgung persekutuan luar ditunjukkan dengan warna biru dan garis singgung persekutuan dalam ditunjukkan dengan warna merah.

   b. Tentukan panjang masing-masing garis singgung persekutuan.

   Garis singgung persekutuan luar panjangnya

$$\begin{aligned} s^2 &= d^2 - (R - r)^2 \\ &= 5^2 - (2 - 1)^2 \\ &= 24 \\ s &= 2\sqrt{6} \text{ cm} \end{aligned}$$

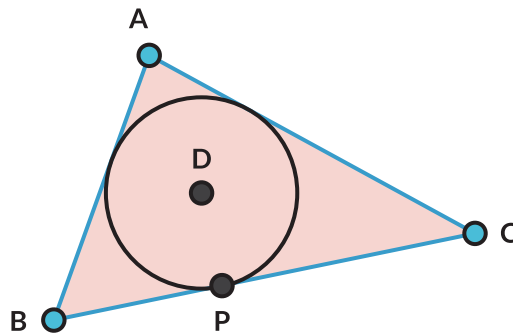
Garis singgung persekutuan dalam panjangnya

$$\begin{aligned} g^2 &= d^2 - (R + r)^2 \\ &= 5^2 - (2 + 1)^2 \\ &= 16 \\ g &= 4 \text{ cm} \end{aligned}$$

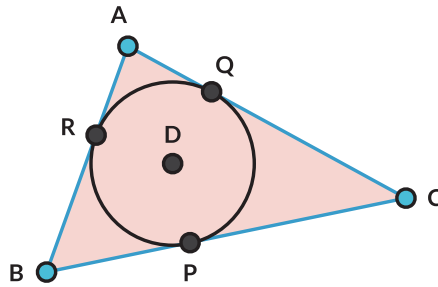
c. Manakah yang lebih panjang: garis singgung persekutuan dalam atau garis singgung persekutuan luar?

Dalam kasus ini garis singgung persekutuan luar lebih panjang daripada garis singgung persekutuan dalam ($s^2 > g^2$).

Apakah hal ini berlaku umum? Perhatikan rumus panjang garis singgung persekutuan. Tampak bahwa secara umum garis singgung persekutuan luar lebih panjang daripada garis singgung persekutuan dalam.

9. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, dan $\overline{AC}$ adalah garis-garis singgung pada lingkaran D.

Ketiga sisi $\triangle ABC$ menyinggung lingkaran D.

a. Lingkaran D adalah lingkaran **dalam** $\triangle ABC$.

b. Buktikan: $AB + PC = AC + PB$

Bukti: Titik P,Q,R adalah titik singgung, maka:

$AQ = AR$ (garis singgung dari titik A)

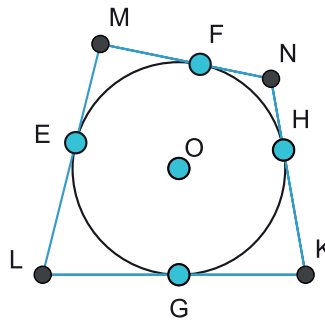
$BR = BP$

$CP = CQ$

$AB + PC = AR + RB + PC$
$= AQ + PB + QC$
$= AQ + QC + PB$
$= AC + PB$ (terbukti)

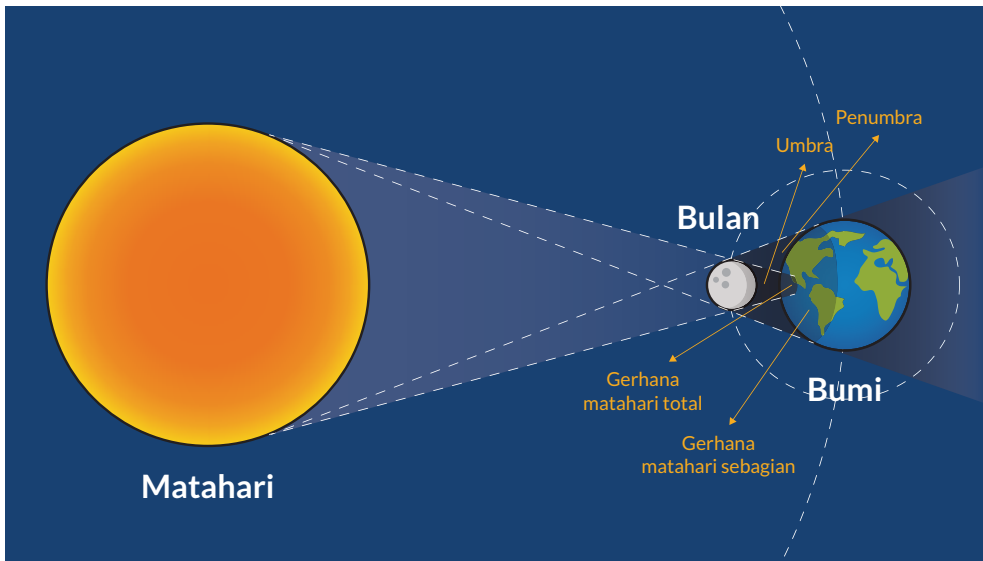
10. Ayo Berpikir Kritis

$\overline{KL}$, $\overline{LM}$, $\overline{MN}$ dan $\overline{NK}$ adalah garis-garis singgung pada lingkaran O. Segiempat $KLMN$ disebut segiempat garis singgung.

Buktikan: $LK + MN = LM + NK$

Bukti: Titik E, F, G, H adalah titik singgung.

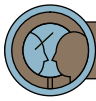
$LK + MN = (LG + GK) + (MF + FN)$
$= (LE + HK) + (EM + NH)$
$= (LE + EM) + (NH + HK)$
$= LM + NK$ (terbukti)

Tahukah Kamu?

Untuk siswa yang sudah menyelesaikan bagiannya dapat membaca informasi tambahan mengenai aplikasi dari garis singgung dalam menentukan bagian bumi yang akan mengalami gerhana matahari.

Gambar 2.8 Gerhana Matahari

Rangkuman

Di akhir dari pembelajaran Bagian B. Lingkaran dan Garis Singgung, guru merangkum apa yang sudah dipelajari, yaitu:

1. Garis singgung berpotongan dengan lingkaran di satu titik.
2. Titik potong lingkaran dengan garis singgung disebut titik singgung.
3. Garis singgung dan jari-jari lingkaran di titik singgung berpotongan tegak lurus.
4. Dari satu titik di luar lingkaran, dapat dibentuk dua garis singgung yang sama panjang.

Ajak siswa untuk refleksi diri dengan menjawab pertanyaan berikut. Siswa dapat menuliskannya dalam buku jurnal refleksi dan minta mereka memberikan bukti atau contoh pemahaman mereka.

1. Apakah saya dapat menggambar garis singgung?
2. Apakah saya dapat menentukan panjang garis singgung?
3. Apakah saya paham sifat-sifat garis singgung?

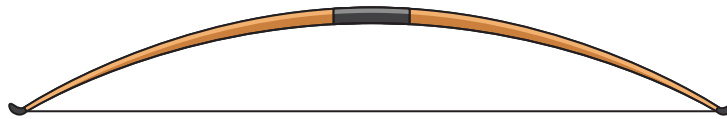
C. Lingkaran dan Tali Busur

Sebelum memasuki materi mengenai Lingkaran dan Tali Busur, guru diharapkan dapat menjelaskan pengalaman belajar yang akan didapat siswa setelah mempelajari bab ini.

Setelah mempelajari bab ini, siswa dapat

- memahami hubungan antara tali busur dan ukuran busur; dan
- membuktikan teorema yang berhubungan dengan lingkaran dan tali busur.

- Kertas
- Jangka
- Penggaris

Perkenalkan bab ini dengan menanyakan siswa apakah ada yang pernah memiliki pengalaman menggunakan panah dan busur. Jika ada, minta siswa menjelaskan seperti apa bentuk busur panah, terbuat dari bahan apa, dan bagaimana menggunakannya.

Gambar 2.9 Busur Panah

Guru mengajak siswa memperhatikan gambar busur panah dan meminta siswa untuk mengidentifikasi bagian busur dan bagian tali busur.

Minta siswa untuk melakukan Eksplorasi 2.3. Ini dapat dilakukan secara individu, berpasangan atau berkelompok. Melalui pendekatan *Discovery Learning* dalam eksplorasi ini siswa diharapkan menemukan sifat dari tali busur dan juga segiempat tali busur. Guru juga diharapkan menuntun siswa untuk melakukan pembuktian terhadap apa yang ditemukan.

Eksplorasi 2.3

Pada eksplorasi ini guru membimbing siswa untuk menemukan bahwa tali busur yang sama panjang memiliki ukuran busur yang sama, serta membuktikannya. Kemudian, minta siswa membaca percakapan antara Nyoman dan Rani, dan mencoba untuk membuktikan dengan membuat

gambar lingkaran dengan tali busur yang sama panjangnya serta mengukur sudut pusat yang terbentuk. Bantu siswa untuk menjelaskan hasil temuan mereka.

Pertanyaan 1

Biarkan siswa mencoba menjawab sendiri dan tampung jawaban mereka tanpa mengatakan apakah jawaban mereka benar atau salah. Mereka akan menemukan jawabannya ketika menjawab pertanyaan berikutnya.

Pertanyaan 2

Kedua segitiga tersebut adalah kongruen karena dua sisi dari kedua segitiga merupakan jari-jari lingkaran sehingga panjangnya sama. Sisi ketiga merupakan tali busur dan sudah ditetapkan memang sama besarnya.

Pertanyaan 3

Karena $\triangle OAB$ dan $\triangle OCD$ kongruen maka $\angle AOB = \angle COD$.

Pertanyaan 4

Karena $\angle AOB = \angle COD$ maka besarnya $\overset{\frown}{AB}$ dan $\overset{\frown}{CD}$ juga sama.

Eksplorasi 2.4

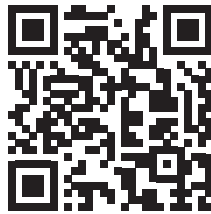
Pada eksplorasi ini guru mengarahkan siswa untuk menemukan bahwa pada segiempat tali busur sudut yang berhadapan merupakan sudut pelurus (jumlahnya 180^o).

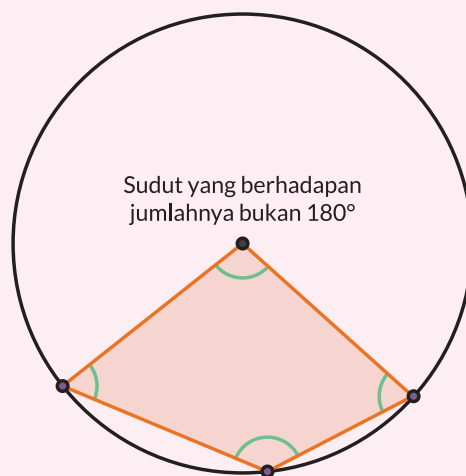
Guru minta siswa membaca hasil temuan Sondang dan percakapan dengan Nyoman dan Rani. Kemudian minta siswa untuk menunjukkan apakah hasil temuan Sondang benar dan berlaku hanya untuk kasus itu saja atau berlaku secara umum.

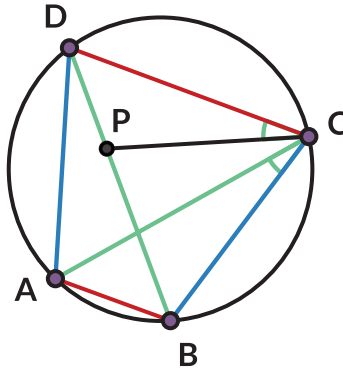
Siswa melakukan eksplorasi dalam kelompok dengan membuat berbagai bentuk segiempat tali busur mengikuti petunjuk dan pertanyaan 1 sampai 4. Mereka akan menemukan bahwa hasilnya berlaku untuk semua segiempat tali busur.

Ayo Menggunakan Teknologi

Untuk eksplorasi ini, jika siswa ada akses teknologi, mereka dapat menggunakan aplikasi berikut.

https://www.geogebra.org/m/PgCevftt

Miskonsepsi

Siswa mungkin berasumsi bahwa segiempat apapun di dalam lingkaran memiliki sudut berhadapan pelurus. Mereka perlu menyadari bahwa itu hanya berlaku untuk segiempat tali busur, yaitu segiempat dengan keempat titik sudut berada pada busur lingkaran. Maka, gambar berikut bukanlah segiempat tali busur karena salah satu titik sudut dari keempat berada di titik pusat dan bukan pada busur lingkaran.

Pertanyaan 5

Mengarahkan siswa untuk menemukan hubungan antara diagonal dan sisi dari segiempat tali busur, dan ini disebut sebagai Teorema Ptolemeus.

a. Gambarkan titik P pada $\overline{BD}$ sehingga $\angle ACB = \angle DCP$. Buktikan bahwa $\triangle CDP \sim \triangle CAB$

$\angle ACB = \angle DCP$ (Diberikan)

$\angle CAB = \angle CDP$ (Sudut keliling pada busur BC)

Karena dua sudut sudah sama, maka sudut ketiga $\angle CBA = \angle CPD$ (Jumlah sudut segitiga 180 derajat).

Maka $\triangle CDP \sim \triangle CAB$

b. Tunjukkan bahwa $DP \cdot AC = AB \cdot CD$.

Karena $\triangle CDP \sim \triangle CAB$, maka $\dfrac{DP}{AB} = \dfrac{CD}{AC}$

Sehingga, $DP \cdot AC = AB \cdot CD$

c. Tunjukkan bahwa $\triangle ACD \sim \triangle BCP$.

$\angle DAC = \angle PBC$ ($\angle$DBC sudut keliling dari $\overset{\frown}{DC}$)

$\angle ACD = \angle BCP$ ($\angle ACB = \angle DCP$ dan berbagi $\angle ACP$)

Karena dua sudut sudah sama, maka sudut ketiga $\angle ADC = \angle BPC$ (Jumlah sudut segitiga 180°).

Maka $\triangle ACD \sim \triangle BCP$

d. Tunjukkan bahwa $BP \cdot AC = BC \cdot DA$

Karena $\triangle ACD \sim \triangle BCP$, maka $\dfrac{BP}{DA} = \dfrac{BC}{AC}$

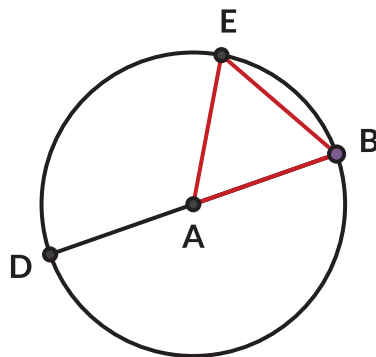
Sehingga, $BP \cdot AC = BC \cdot DA$

e. Berdasarkan b. dan d. apa yang dapat kalian simpulkan tentang $AC \cdot BD$?

$$AC \cdot DP + AC \cdot BP = AB \cdot CD + BC \cdot DA$$
$$AC \cdot (DP + BP) = AB \cdot CD + BC \cdot DA$$
$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$$

Hasil kali diagonal segiempat tali busur sama besarnya dengan jumlah dari hasil kali sisi yang berhadapan.

Jawaban Latihan 2.3

1. Lingkaran yang berpusat di titik O dan jari-jarinya 5 cm. Berapa panjang tali busurnya yang paling panjang?
   Tali busur yang terpanjang adalah diameter, panjangnya 10 cm.
2. Jika AD = 3 cm dan BE = AD, tentukan:

$AE = AB = BE$ maka ΔABE sama sisi.

   a. besar $\angle BAE$

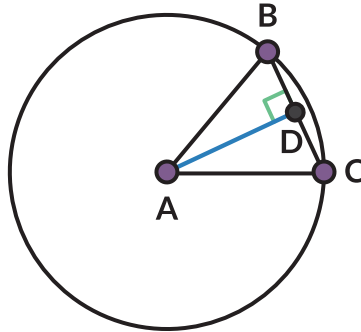
      $\angle BAE = 60°$

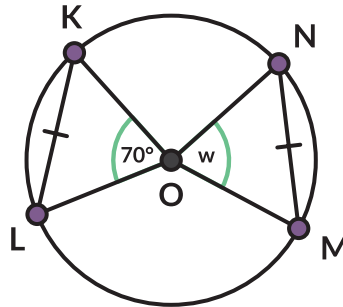
   b. Besar $\angle BDE$

      $\angle BDE$ adalah sudut keliling yang menghadap pada busur BE, besarnya $\angle BDE = \frac{1}{2} \angle BAE = 30°$

3. **Apotema**
   Apotema adalah ruas garis dari pusat lingkaran dan tegak lurus tali busur.

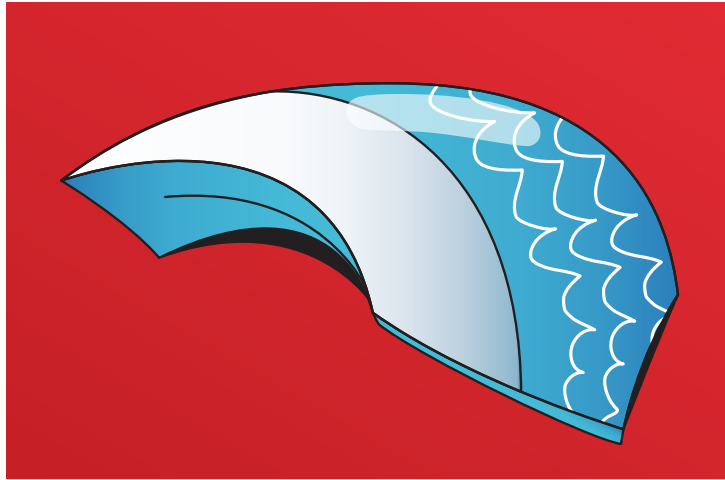
   Buktikan bahwa $BD = DC$.

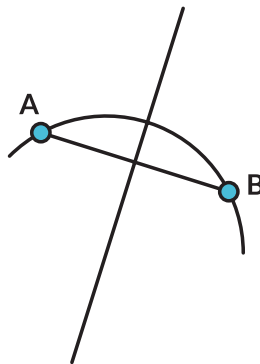
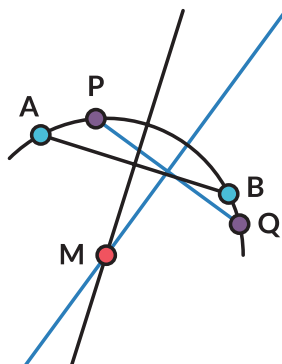
Gambarkan $\overline{AB}$ dan $\overline{AC}$. Keduanya adalah jari-jari lingkaran, $AB = AC$ maka $\triangle ABC$ sama kaki dan $\angle ABC = \angle ACB$.

$\overline{AD}$ adalah garis tinggi $\triangle ABC$ pada sisi $\overline{BC}$. Sesuai sifat segitiga sama kaki, $BD = DC$.

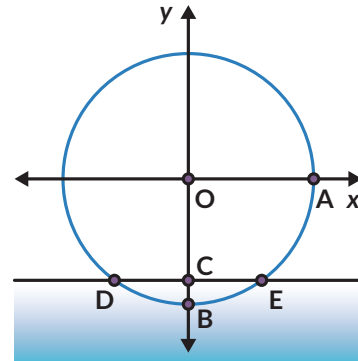
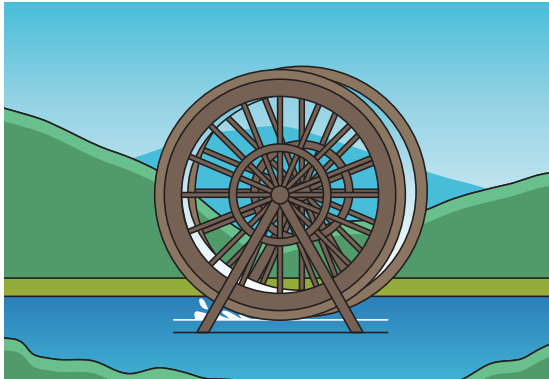
4. Tentukan nilai w sehingga $\overline{KL}$ dan $\overline{MN}$ sama panjang.

Tali busur yang sama panjang menghadap pada busur yang sama besar.
$w = 70^\circ$

5. **Ayo Berpikir Kritis**

Situs Gunung Padang adalah situs prasejarah megalitik besar yang terletak di Kabupaten Cianjur. Salah satu artefak yang ditemukan di sana diduga merupakan pecahan guci.

Diskusikan dengan temanmu bagaimana cara menentukan diameter mulut guci tersebut.

Bagian guci yang ditemukan merupakan busur lingkaran. Ingat soal nomor 3 bahwa garis sumbu dari tali busur melalui pusat lingkaran (Garis sumbu: garis yang melalui titik tengah dan tegak lurus).

a. Gambarkan sebuah tali busur, dari titik tengahnya gambarkan garis yang tegak lurus.

b. Ulangi dengan tali busur yang berbeda.

c. Kedua garis sumbu berpotongan di pusat lingkaran (titik M).

6. Kincir air berikut digunakan untuk pembangkit energi dan irigasi. Pada diagram sebelah kanan, roda dengan diameter 10 m diletakkan pada sungai sehingga titik terendah roda terletak pada kedalaman 1 m.

a. Tentukan ketinggian titik A dari permukaan air.

Ketinggian titik A dari permukaan air sama dengan jarak $OC = OB - BC = 9$ m

b. Permukaan air ditunjukkan oleh tali busur DE. Tentukan besar $\angle DAE$.

$\angle DAE$ adalah sudut keliling yang menghadap pada $\overset{\frown}{DE}$.

$\angle DAE = \frac{1}{2} . \angle DOE$	$\angle DAE$ sudut keliling pada busur DE
$\angle DAE = \frac{1}{2} . 2 . \angle BOE$ $= \angle BOE$	$\angle DOE = 2 . \angle BOE$ karena $\triangle DOE$ sama kaki, $OD = OE$
$\angle COE = \cos^{-1}\left(\frac{OC}{OE}\right)$ $= \cos^{-1}(0,9)$ $= 25,84°$	Perbandingan Trigonometri pada $\triangle COE$

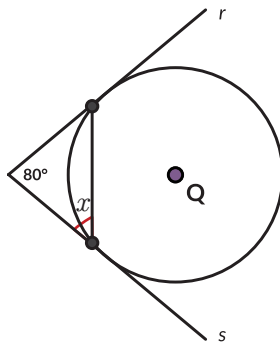
$\angle DAE = \angle BOE = 25,84°$

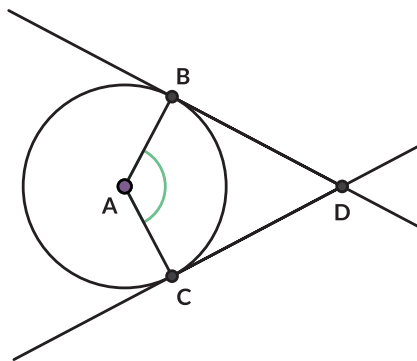
c. Tentukan jarak dua titik pada roda yang terletak di permukaan air.

Yang ditanyakan adalah panjang $DE = 2 \cdot CE$

$$CE^2 = OE^2 - OC^2$$
$$= 10^2 - 9^2 = 19$$
$$CE = \sqrt{19}$$
$$DE = 2 \cdot CE$$
$$= 2\sqrt{19} \text{ m}$$

7. Sinar garis r dan s adalah garis singgung pada lingkaran Q. Jika sudut antara r dan s adalah 80°, tentukan besarnya x.

   Kedua garis singgung sama panjang, maka garis-garis singgung dan tali busur membentuk segitiga sama kaki.

$$x = \frac{1}{2} \cdot (180° - 80°)$$
$$= 50°$$

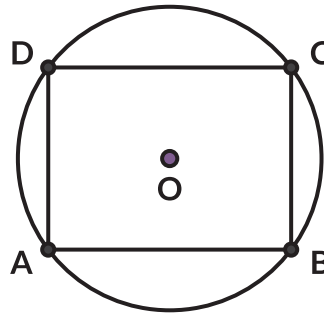
8. Garis BD dan CD adalah garis singgung pada lingkaran A.

   a. Apakah segiempat $ABDC$ merupakan segiempat tali busur? Buktikan.

Bukti:

- $\angle B = \angle C = 90^\circ$ maka $\angle B + \angle C = 180^\circ$
- Jumlah semua sudut pada segiempat adalah 360° maka $\angle A + \angle D = 360^\circ - (\angle B + \angle C) = 180^\circ$
- Sudut-sudut yang berhadapan jumlahnya 180° maka segiempat *ABDC* merupakan segiempat tali busur

b. Jika segiempat *ABDC* merupakan segiempat tali busur, di manakah pusat lingkaran luar segiempat *ABDC*?

Ingat bahwa sudut siku-siku menghadap pada diameter, maka *AD* adalah diameter. Pusat lingkaran terletak pada titik tengah *AD*.

9. Segiempat *ABCD* adalah persegi panjang yang semua titik sudutnya terletak pada lingkaran.

Persegi panjang *ABCD*

a. Apakah *ABCD* merupakan segiempat tali busur? Buktikan.

Semua sudut pada persegi panjang adalah sudut siku-siku, maka sudut-sudut yang berhadapan jumlahnya 180°.

b. Jika kalian menerapkan Teorema Ptolemeus pada segiempat *ABCD*, apakah yang kalian dapatkan?

Teorema Ptolemeus

$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$

Pada persegi panjang, berlaku $AB = CD$ dan $BC = DA$, juga $AC = BD$, maka teorema Ptolemeus menjadi

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

c. Apakah nama teorema tersebut?

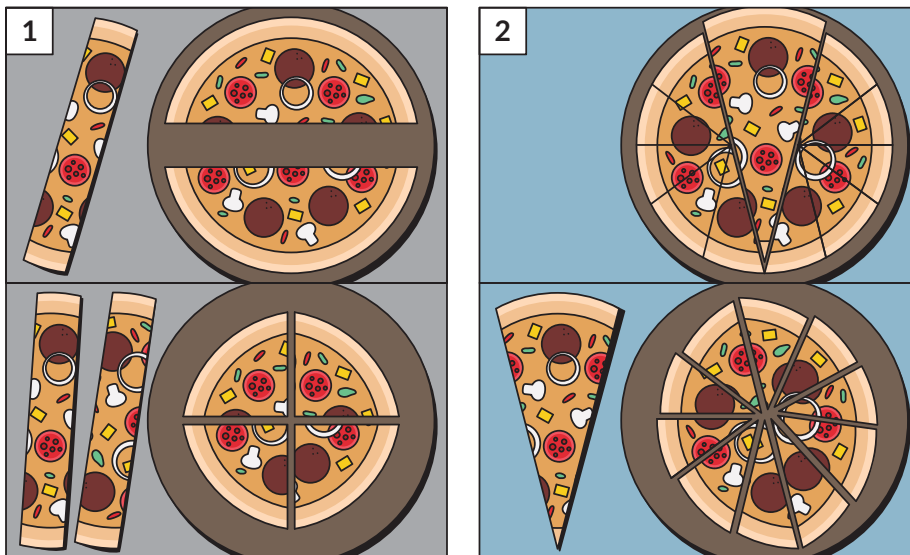
Teorema Pythagoras

10. **Ayo Berpikir Kreatif**

Goras ingin menyajikan pizza yang dibelinya di atas piring. Sayangnya, piring yang tersedia diameternya lebih kecil daripada diameter pizza. Ia memotong pizzanya dengan cara tertentu, mengambil sebagian, lalu menyusun sisa pizza sehingga terlihat sebagai pizza utuh.

Ini adalah soal tantangan.

a. Ambillah sepotong kertas berbentuk lingkaran. Cobalah melakukan hal yang dikerjakan Goras.

   Persilakan siswa mencoba ide masing-masing dan menunjukkan hasilnya. Berikut ini adalah dua alternatif jawaban.

b. Apakah pizza kedua sama dengan pizza awal? Jelaskan.

   Walaupun pizza kedua seolah-olah merupakan lingkaran utuh, ukurannya berbeda dengan pizza awal. Perhatikan bahwa ukuran lingkarannya berbeda: pizza awal diameternya lebih besar dari diameter piring, pizza kedua diameternya sama dengan diameter piring.

Bagi siswa yang kecepatan belajarnya tinggi (*advanced*), minta mereka mengerjakan Latihan tanpa bantuan. Pada saat yang sama, guru dapat mendampingi siswa yang mengalami kesulitan.

Rangkuman

Di akhir dari pembelajaran Bagian C. Lingkaran dan Tali Busur, guru merangkum apa yang sudah dipelajari, yaitu pada segiempat tali busur berlaku:

- Sudut-sudut yang berhadapan saling berpelurus.
- Hasil kali diagonal sama besarnya dengan jumlah dari hasil kali sisi yang berhadapan. Dengan kata lain, jika $ABCD$ segiempat tali busur dan AC dan BD adalah diagonal-diagonalnya, maka

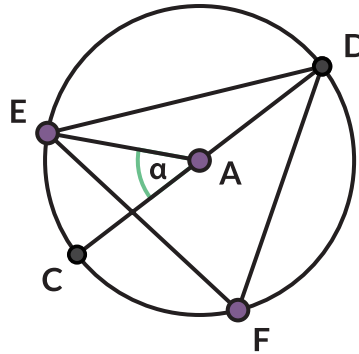
  $$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$$

Tutup pembelajaran dengan meminta siswa melakukan refleksi terhadap apa yang sudah mereka pelajari dengan menjawab pertanyaan refleksi. Ajak siswa untuk menuliskannya dalam buku jurnal refleksi dan minta mereka memberikan bukti atau contoh pemahaman mereka.

1. Apakah saya dapat menerapkan teorema-teorema tentang lingkaran?
2. Apakah saya dapat membuktikan teorema-teorema terkait lingkaran?
3. Apakah saya mengerti sifat-sifat garis singgung?
4. Apakah saya mengerti sifat-sifat segiempat tali busur?

Jawaban Uji Kompetensi

1. Jika $\alpha = 48°$, tentukan besarnya

   a. $\angle$CDE

   $\angle CDE = \frac{1}{2} \cdot 48° = 24°$

   b. $\angle DEA$

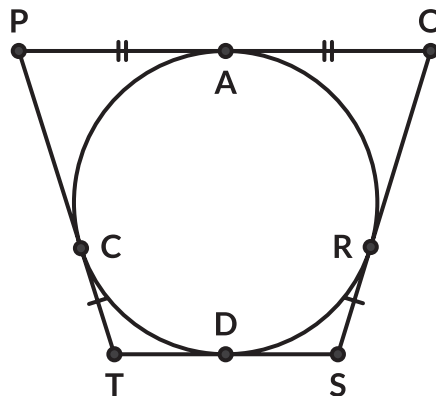
   $AE = AD$ maka $\angle DEA = \angle ADE = 24°$

   c. $\angle DAE$

   $\angle DAE$ pelurus $\angle CAE$ maka $\angle DAE = 180° - 48° = 132°$

   d. $\angle DFE$

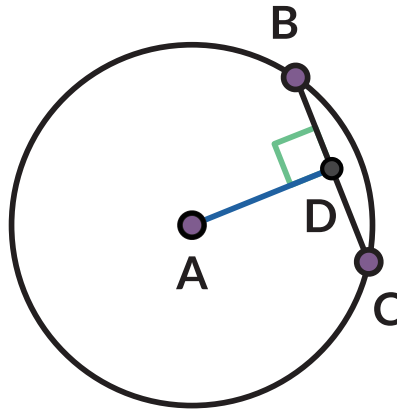
   $\angle DFE = \frac{1}{2} \cdot 132° = 66°$

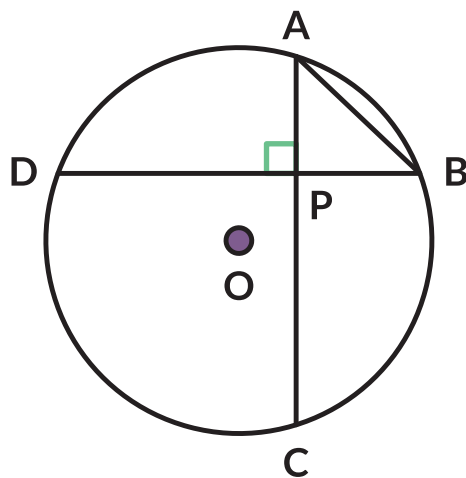
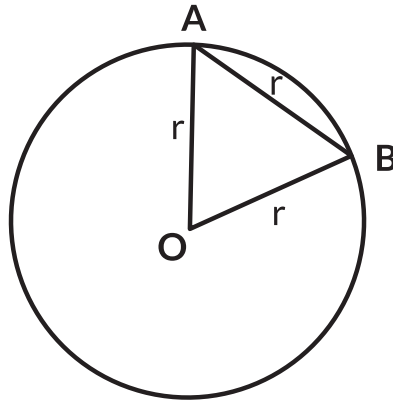
2. Segiempat *POST* keempat sisinya menyinggung lingkaran *Y*. Jika panjang $\overline{TS} = 12$ cm dan panjang $\overline{PC} = 14$ cm, tentukan keliling *POST*.

$PC = PA = AO = OR = 14$ dan

$CT = TD = DS = SR = \frac{1}{2} \cdot 12$

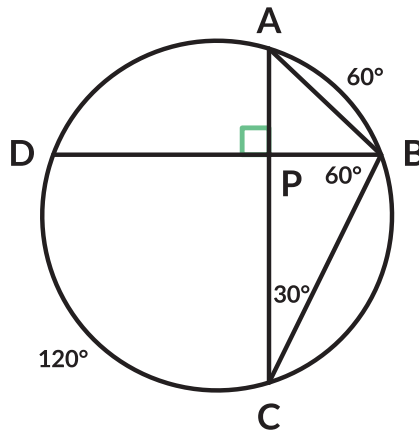
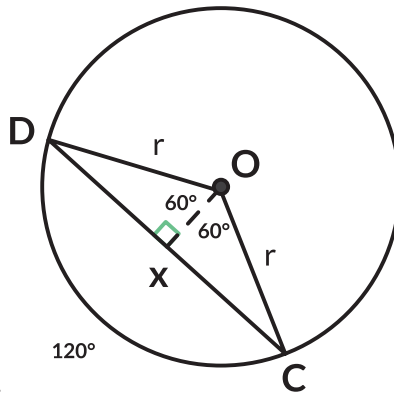
Keliling $POST = 4 \cdot (14 + 6)$

$= 80$ cm

3. Pada lingkaran A yang berjari-jari 5 cm terdapat tali busur $\overline{BC}$ sepanjang 8 cm. Tentukan panjang apotemanya.

$\triangle ABD$ siku-siku di D dengan $AB = 5$, $BD = 4$. Dengan teorema Pythagoras didapat $AD = 3$ cm.

4. Dua tali busur, $\overline{AC}$ dan $\overline{BD}$ pada lingkaran dengan pusat O, berpotongan tegak lurus pada titik P. Panjang AB sama dengan jari-jari lingkaran.

a. Berapa besar $\widehat{AB}$?

Gambar sudut pusat terhadap tali busur $\overline{AB}$. Kita dapat melihat hasilnya adalah sebuah segitiga sama sisi. Sudut pusat, yang merupakan besar $\widehat{AB}$ adalah 60°.

b. Apa nilai perbandingan $\frac{DC}{AB}$? Jelaskan bagaimana kamu mendapatkan jawabannya.

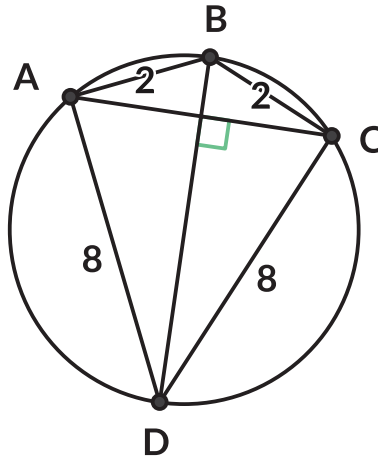
Gambar tali busur $\overline{BC}$. $\angle ACB = 30°$ karena merupakan sudut keliling yang menghadap pada $\widehat{AB}$. Pada segitiga *PCB*, $\angle PBC = 60°$, maka besar $\widehat{DC} = 120°$.

Gambarkan sudut pusat ini. Gambarkan ruas garis *OX* tegak lurus terhadap *DC* sebagaimana terlihat pada gambar berikut. Kita bisa melihat bahwa segitiga *DXO* setengah dari segitiga sama sisi, maka panjang $XO = \frac{1}{2}r$

Maka, $DX = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}\,r}{2}$, dan $DC = \sqrt{3}\,r$, maka $\frac{DC}{AB} = \sqrt{3}$

5. Berapa panjang dari tali busur $\overline{AC}$?

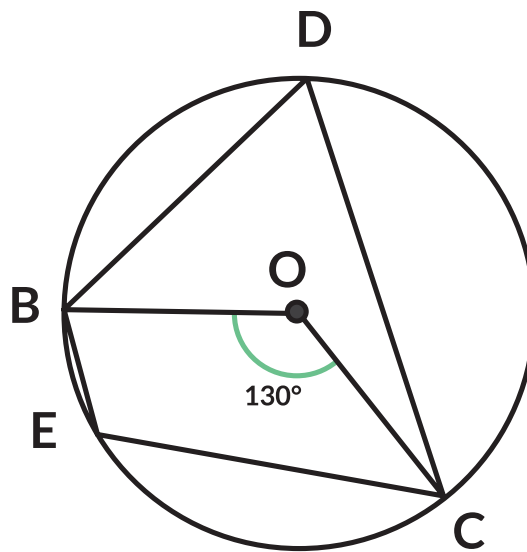
   a. $\frac{16\sqrt{17}}{17}$

   b. $\sqrt{68}$

   c. $\sqrt{32}$

   d. $\frac{\sqrt{32}}{68}$

Jawab: a. $\frac{16\sqrt{17}}{17}$

Tali busur BD merupakan diameter lingkaran karena tegak lurus dengan tali busur AC, dan $BD = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{68}$. Berdasarkan teorema Ptolemeus maka $AC \cdot \sqrt{68} = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 8$ sehingga $AC = \frac{16\sqrt{17}}{17}$.

6. Segiempat *BDCE* adalah segiempat tali busur, *0* adalah titik pusat lingkaran, dan besar $\angle BOC = 130°$. Tentukan besar $\angle BEC$.

$\angle BDC = \frac{1}{2} \angle BOC = 65°$ (sudut pusat dan sudut keliling dari busur yang sama). Sudut berhadapan dalam segiempat tali busur pelurus, sehingga $\angle BEC + 65° = 180°$.

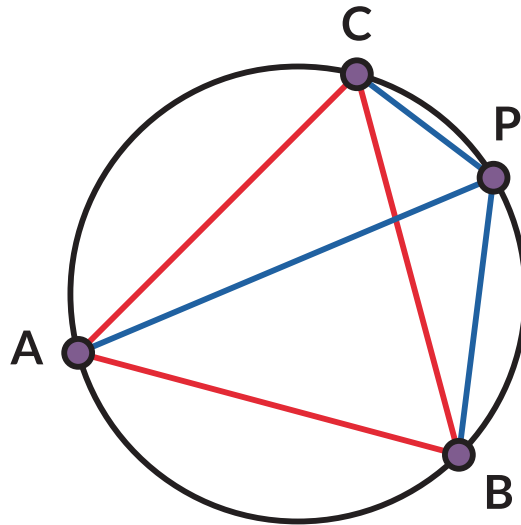
Maka $\angle BEC = 115°$

Pengayaan

Proyek ini bersifat opsional dan dapat diberikan sebagai tugas tambahan khususnya untuk siswa yang butuh tantangan lebih.

Gambar 2.10 menunjukkan segitiga sama sisi *ABC*. Titik *P* terletak pada lingkaran luar segitiga *ABC*. Titik *P* dihubungkan dengan setiap titik sudut segitiga *ABC* .

Jika *AP* lebih panjang daripada *BP* dan *CP* , buktikan bahwa:

$AP = BP + CP$

Gambar 2.10 Segitiga Sama Sisi *ABC*

Sifat ini pertama kali ditemukan oleh matematikawan Belanda bernama Frans van Schooten, karena itu disebut sebagai **Teorema van Schooten**.

Teorema van Schooten walaupun sederhana namun memberikan kejutan, dan seperti berbagai teorema lain, dapat dibuktikan dengan berbagai cara.

Bukti 1

Misalkan $AP = a$, $BP = b$, $CP = c$ dan masing-masing sisi dari segitiga sama sisi *ABC* adalah *d*. $\angle APB = \angle APC = 60°$ karena kedua sudut berada pada tembereng yang sama dari lingkaran masing-masing sebagai sudut *C* dan *B* dari segitiga sama sisi *ABC*. Dengan menggunakan aturan cosinus pada segitiga *APB* dan *APC* kita mendapatkan:

$d^2 = a^2 + b^2 - ab$ dan $d^2 = a^2 + c^2 - ac$

Dengan mengurangkan dan menuliskan ulang memberikan:

$a\,(b - c) = b^2 - c^2$

$a = b + c$, jika $b \neq c$

Untuk kasus $b = c$, kedua segitiga merupakan segitiga siku-siku dan dengan mudah kita lihat bahwa

$a = 2b = 2c$

Bukti 2

Jika sebuah garis digambar dari A sehingga bertemu dengan PC pada D dengan $\angle PAD = 60°$, maka segitiga APD adalah segitiga sama sisi dan $PD = a$. Sekarang dengan mudah kita menunjukkan bahwa segitiga APB dan ADC adalah kongruen dan oleh karena itu $CD = b$

Mengikuti itu, dengan memperhatikan PD, maka $a = b + c$.

Bukti 3

Menarik untuk diperhatikan bahwa Teorema van Schooten mengikuti langsung dari Teorema Ptolemeus, yang mengatakan bahwa pada segiempat tali busur hasil kali dari diagonal sama besarnya dengan jumlah dari hasil kali kedua pasang sisi, atau pada segiempat tali busur $ABCD$ berlaku

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$$

Perhatikan segiempat tali busur $ABPC$, ini memberikan $ad = bd + cd$ sehingga langsung mendapatkan bahwa $a = b + c$.

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2021

Buku Panduan Guru Matematika untuk SMA/SMK Kelas XI

Penulis: Dicky Susanto, dkk.

ISBN: 978-602-244-789-4 (jil.2)

Bab 3

Statistika

Tujuan pembelajaran:

Setelah mempelajari bab ini, siswa dapat:

1. Menggambar diagram pencar atau diagram *scatter* data bivariat
2. Menginterpretasikan diagram pencar atau diagram *scatter* data bivariat
3. Menentukan arah dan bentuk trend data bivariat dari diagram pencar atau diagram *scatter*
4. Menggambar persamaan garis regresi linear
5. Menentukan persamaan garis regresi linear
6. Menginterpretasikan persamaan garis regresi linear
7. Menerapkan interpolasi dan ekstrapolasi data berdasarkan suatu persamaan garis regresi linear
8. Menghitung nilai korelasi *product moment* dan koefisien determinasi
9. Menginterpretasikan nilai korelasi *product moment* dan koefisien determinasi dalam proses analisis regresi linear

Gambaran Umum Bab

Bab ini bertujuan mengembangkan kemampuan siswa untuk menyajikan data bivariat dan menganalisis serta menarik kesimpulan yang tepat dari suatu data bivariat yang diberikan ataupun diperoleh dengan observasi mandiri dan kelompok.

Pada subbab A dibahas mengenai penyajian data bivariat ke dalam bentuk diagram pencar atau diagram *scatter*. Diagram pencar ini akan menjadi dasar analisis secara visual dengan melihat arah dan bentuk trend data. Pada subbab ini juga akan dibahas berbagai jenis korelasi berdasarkan arah dan bentuk trend data.

Pada subbab B dibahas mengenai konsep regresi linear sebagai suatu model yang digambarkan dalam bentuk garis lurus menyusuri data-data yang telah disajikan dalam diagram pencar. Garis ini akan ditarik secara intuitif namun dapat dibedakan dengan mempertimbangkan residunya. Pada subbab ini juga akan diajarkan cara menghitung dan menentukan persamaan garis yang tepat dengan rumus yang diturunkan berdasarkan metode kuadrat terkecil sebagai garis regresi suatu data bivariat.

Pada subbab C dibahas mengenai konsep korelasi *product moment* dan koefisien determinasi. Analisis lanjutan mengenai suatu garis regresi diperkenalkan dengan mempertimbangkan nilai *product moment* (r) yang sekaligus memberikan indikator arah dan kekuatan dari suatu garis regresi. Pada subbab ini juga akan diperkenalkan mengenai koefisien determinasi (r^2) yang menunjukkan persentase variasi yang dijelaskan oleh garis regresi dari total variasi data.

Pemahaman mengenai garis regresi dalam bab ini terkait dengan bentuk umum persamaan garis lurus yang telah dipelajari pada jenjang sebelumnya serta konsep varians dari suatu data pada ilmu statistika yang telah dipelajari akan menjadi dasar konsep metode kuadrat terkecil. Bab ini juga terkait dengan mata pelajaran Biologi, Fisika, Kimia, Sosiologi, Ekonomi, dan lainnya yang sering melibatkan data dan variabel untuk pencarian hubungan antar variabel yang berguna untuk pengambilan kesimpulan dalam pengembangan ilmu pengetahuan ataupun dalam mencari solusi penyelesaian.

Skema Pembelajaran

Subbab	Waktu (JP)*	Tujuan	Pokok Materi	Kosakata	Metode dan Aktivitas
A. Diagram Pencar atau Diagram Scatter	8 JP	• Menggambar diagram pencar atau diagram *scatter* data bivariat • Menginterpretasikan diagram pencar atau diagram *scatter* data bivariat • Menentukan arah dan bentuk trend data bivariat dari diagram pencar atau diagram *scatter*	Diagram pencar atau diagram *scatter*, korelasi dan sebab-akibat, arah dan bentuk trend data	Diagram pencar/ scatter, data bivariat, trend, korelasi, sebab-akibat, linear, kurva/non-linear	Eksplorasi
B. Regresi Linear Pengertian Metode Kuadrat Terkecil	8 JP	• Menggambar persamaan garis regresi linear • Menentukan persamaan garis regresi linear	Regresi linear, interpolasi, dan ekstrapolasi	Regresi linear, regresi non-linear, garis *best-fit*, metode kuadrat	Eksplorasi

Subbab	Waktu (JP)*	Tujuan	Pokok Materi	Kosakata	Metode dan Aktivitas
		• Menginterpretasikan persamaan garis regresi linear • Menerapkan interpolasi dan ekstrapolasi data berdasarkan suatu persamaan garis regresi linear		terkecil, residu, interpolasi, ekstrapolasi	
B. Analisis Korelasi Pengertian Korelasi *Product Moment* Koefisien Determinasi	8 JP	• Menghitung nilai korelasi *product moment* dan koefisien determinasi • Menginterpretasikan nilai korelasi *product moment* dan koefisien determinasi dalam proses analisis regresi linear	Korelasi *product moment*, koefisien determinasi	Korelasi *product moment*, koefisien determinasi	Eksplorasi

Catatan:

*Waktu merupakan saran rentang jam pelajaran. Guru dapat menyesuaikan dengan kondisi aktual pembelajaran.

Panduan Pembelajaran

A. Diagram Pencar atau Diagram *Scatter*

- Siswa melakukan eksplorasi berdasarkan instruksi dan pertanyaan terpandu.
- Siswa berdiskusi dengan sesama siswa dalam eksplorasi dan mengambil kesimpulan bersama.
- Siswa mempelajari konsep-konsep yang digunakan di balik eksplorasi yang dilakukan dan membandingkan kesimpulan yang telah diambil sebelumnya.
- Siswa menerapkan konsep yang benar dalam permasalahan baru.
- Siswa membagikan hasil pengerjaan mereka kepada siswa lain untuk bertukar ide atau gagasan serta memperbaiki konsep yang salah jika ada.
- Siswa menggunakan teknologi dalam pembelajaran.

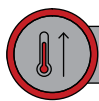
- Buku teks siswa
- Kertas grafik atau milimeter blok
- Penggaris
- Aplikasi *Microsoft Excel*

Ingatkan siswa tentang materi titik koordinat dan menentukan garis lurus serta mengenai rata-rata dan varians pada materi statistika sebelumnya.

Perkenalkan bab ini dengan membahas gambar kover bab ini mengenai kebakaran hutan di Pekanbaru. Siswa diminta untuk memikirkan hal-hal apa saja yang terjadi saat kebakaran hutan terjadi. Jawaban yang diharapkan

adalah mulai dari yang terlihat misalnya banyak air yang disiramkan maka nyala api akan semakin berkurang dan lainnya, hingga pada hal-hal yang bersifat konseptual misalnya jumlah pohon yang berkurang, populasi satwa yang berkurang, meningkatnya tingkat polusi udara, meningkatnya penderita infeksi saluran pernapasan akut, menurunnya ekonomi lokal, dan lainnya. Siswa diminta untuk berpikir apakah ada hubungan antara hal-hal di atas, misalnya semakin luas hutan yang terbakar maka semakin menurun populasi satwa, semakin luas hutan yang terbakar maka semakin tinggi penderita infeksi saluran pernapasan akut, dan sejenisnya.

Gunakan bagian **Mengingat Kembali** mengenai titik koordinat yang telah dipelajari di SMP. Pertanyaan-pertanyaan berikut dapat digunakan untuk mengaktifkan prapengetahuan siswa.

- Apa saja komponen dari suatu titik koordinat?
- Bagaimana cara menuliskan titik koordinat?
- Ada berapa sumbu pada suatu diagram Kartesian?
- Apa saja nama sumbu-sumbunya dan bagaimana posisinya?

Gunakan pengantar bab untuk membuat siswa berpikir akan relasi antar dua variabel diawali dengan berpikir mengenai hubungan waktu yang didedikasikan YouTuber dan banyak *subscribers*. Mintalah siswa berdiskusi berpasangan mengenai hal-hal apa saja yang mungkin ada hubungan menurut mereka ataupun yang pernah mereka dengar sebelumnya dan hal-hal yang mereka ingin tahu apakah ada hubungannya atau tidak. Bagi siswa yang merasa ada hubungan, mintalah mereka untuk menjelaskan alasannya dalam diskusi.

Setelah berdiskusi, mintalah perwakilan siswa untuk membagikan ide atau gagasan mereka dan alasan mengenai kesimpulan-kesimpulan yang terpikirkan oleh mereka. Mintalah siswa lain menanggapi pernyataan siswa tersebut dan berdiskusilah lebih jauh hingga pada titik di mana data merupakan hal yang penting dalam menarik suatu kesimpulan dan proses analisis yang tepat juga diperlukan. Guru dapat mengarahkan kembali pada

gambar kover bab sebagai data dasar di mana siswa dapat menyimpulkan suatu hubungan antara dua variabel jika diperlukan.

Penjelasan Pembelajaran di Buku Siswa

Pada setiap bagian terdapat eksplorasi, penjelasan konten sesuai eksplorasi atau pengenalan konten baru dan ditutup dengan latihan. Guru dapat mengikuti susunan materi buku dari awal bab sebagai panduan proses pembelajaran siswa. Guru dapat memperhatikan poin-poin di bawah ini sebagai penekanan penting hal umum yang diharapkan oleh konten buku ini.

Siswa perlu memahami konsep titik koordinat yang akan digunakan untuk memetakan data dalam bentuk titik-titik koordinat dengan diagram *scatter* yang telah disediakan. Pada tahapan berikutnya, diagram *scatter* sudah tidak disediakan dan siswa diminta untuk menggambar sendiri pada buku sendiri atau pada milimeter blok.

Siswa diberikan kesempatan untuk menganalisis setiap diagram *scatter* yang digambarkan sehingga akan terbiasa dengan melihat arah dan bentuk trend data untuk melatih proses interpretasi dan pengambilan kesimpulan.

Latihan diberikan pada setiap akhir eksplorasi untuk menguatkan kompetensi dalam menggambar dan menginterpretasikan diagram *scatter*. Gunakan kesempatan ini untuk mengevaluasi ulang miskonsepsi dan pola pengambilan kesimpulan yang salah.

Kesalahan meletakkan data menggunakan konsep titik koordinat di mana posisi x dan y yang tertukar sehingga merusak pola atau trend data yang mengakibatkan kesalahan kesimpulan.

Bentuk trend data antara linear dan kurva/non-linear. Ada kemungkinan siswa tetap akan menggunakan trend linear meskipun bentuk trend data terlihat kurva/non-linear.

Metode & Aktivitas Pembelajaran

Siswa diminta untuk berlogika mengenai hubungan antara rata-rata waktu yang didedikasikan oleh YouTuber dan banyak *subscribers* yang diperoleh tanpa melihat data pada tabel terlebih dahulu. Harapannya siswa dapat mempunyai logika dasar bahwa semakin banyak waktu yang didedikasikan maka semakin banyak pula *subscribers* yang dapat diperoleh oleh YouTuber tersebut.

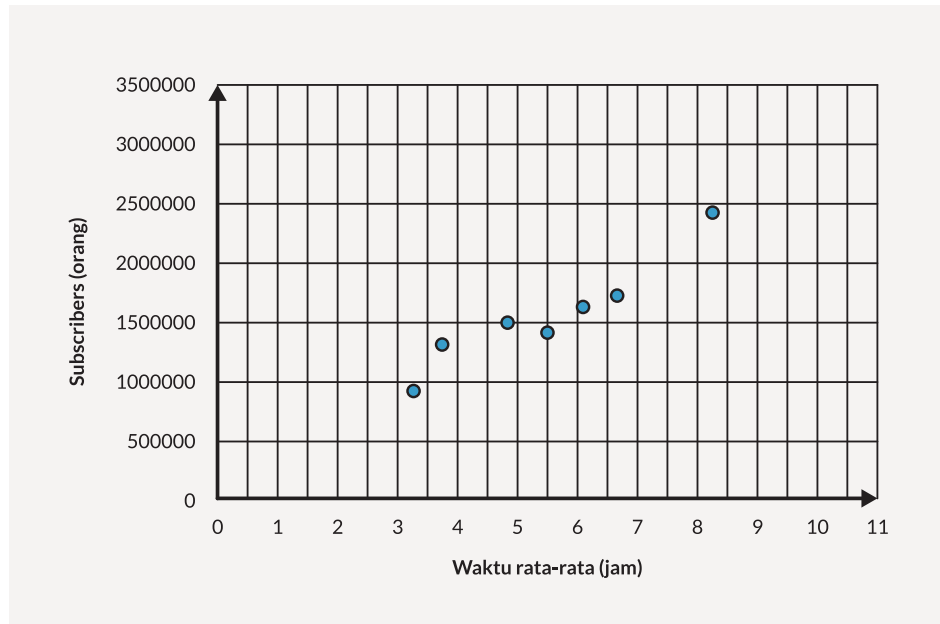
Sajikan data tabel tentang rata-rata waktu dan banyak *subscribers* ke siswa. Mintalah mereka untuk mengolah data tersebut dan ambil kesimpulan berdasarkan ilmu statistika yang telah mereka pelajari sebelumnya. Mintalah perwakilan siswa untuk menjelaskan kesimpulan mereka dan dasar statistika yang mereka gunakan.

Setelah diskusi dan presentasi, mintalah siswa untuk melakukan Eksplorasi 3.1 secara berpasangan atau dalam kelompok bertiga. Mintalah perwakilan siswa untuk mempresentasikan hasilnya dan bimbinglah mereka sesuai dengan kunci jawaban Eksplorasi 3.1 berikut ini.

Kunci Jawaban Eksplorasi 3.1

1. Setiap pasangan data dapat dinyatakan dalam pasangan-pasangan titik koordinat.

Rata-rata waktu per hari	Banyak *subscribers*	Pasangan titik koordinat (Rata-rata waktu, Banyak *subscribers*)
5,5 jam	1.400.000 orang	(5,5 , 1.400.000)
8,3 jam	2.400.000 orang	(8,3 , 2.400.000)
3,8 jam	1.300.000 orang	(3,8 , 1.300.000)
6,1 jam	1.600.000 orang	(6,1 , 1.600.000)
3,3 jam	900.000 orang	(3,3 , 900.000)
4,9 jam	1.500.000 orang	(4,9 , 1.500.000)
6,7 jam	1.700.000 orang	(6,7 , 1.700.000)

Setiap titik di atas digambarkan pada diagram yang telah disediakan maka akan menjadi seperti berikut.

2. Titik-titik yang mempunyai kecenderungan semakin naik ke atas jika dilihat dari kiri bawah ke kanan atas.
3. Berdasarkan arah data sesuai nomor 2, kesimpulan yang dapat diambil adalah semakin tinggi rata-rata waktu maka semakin tinggi juga banyak *subscribers*.
4. Data ke-4 dari kiri pada diagram pencar atau data ke-1 dari tabel, karena meskipun penghasilannya lebih tinggi dari penghasilan data ke-3 namun pengeluarannya lebih rendah dibandingkan pengeluaran data ke-3.
5. Data tersebut tidak menyimpang jauh dari data-data sekitarnya sehingga tidak berpengaruh signifikan terhadap kesimpulan yang diperoleh. Jika data dilihat secara keseluruhan, kesimpulan yang diperoleh masih tetap valid.

Perkenalkan istilah-istilah baru kepada para siswa setelah Eksplorasi 3.1 dengan menghubungkan hal-hal yang telah mereka lakukan di Eksplorasi 3.1.

Ayo Berkomunikasi

Hal yang paling penting adalah mintalah mereka berdiskusi mengenai bagaimana cara menentukan variabel independen dan variabel dependen serta apa yang terjadi ketika kedua variabel tersebut tertukar dengan menggunakan konteks Eksplorasi 3.1. Setelah itu gunakan Gambar 3.3 sebagai ilustrasi apa yang akan terjadi.

Perkenalkan konsep korelasi dan sebab-akibat dengan tujuan agar siswa dapat membedakannya dan selalu berhati-hati dalam mengambil kesimpulan.

Penguatan Karakter

Tekankan pada apa dampak dari suatu kesimpulan yang salah secara umum. Guru dapat memberikan contoh yang sesuai dengan konteks situasi wilayah sekitar atau kondisi nasional dan internasional.

Ayo Berpikir Kreatif

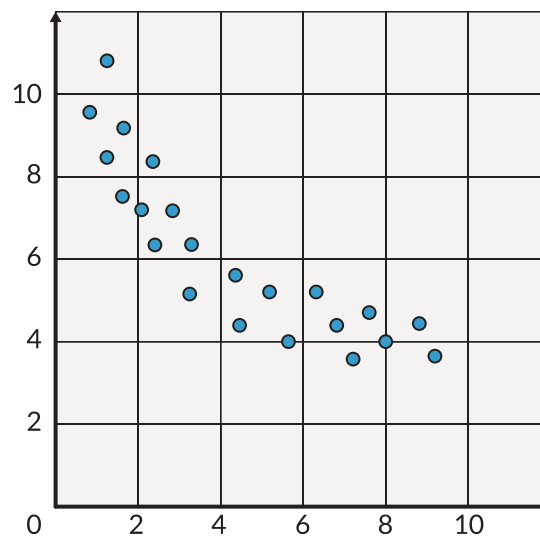
Mintalah siswa berpikir kreatif dalam kelompok tentang isu pengambilan kesimpulan yang salah. Siswa diarahkan untuk mengambil contoh dari kehidupan pribadi mereka atau informasi yang pernah mereka peroleh.

Mintalah siswa untuk mengerjakan Latihan 3.1 untuk menguatkan kompetensi cara menggambar diagram pencar, membacanya dan mengambil kesimpulan. Kunci jawaban Latihan 3.1 ada di bagian bawah bagian ini.

Pada tahap selanjutnya siswa akan mempelajari mengenai arah dan bentuk korelasi data bivariat beserta dengan interpretasinya. Siswa diminta untuk melihat kembali ke konteks awal mengenai rata-rata waktu dan banyak *subscribers* untuk melihat arah dan bentuk trend datanya. Istilah awal yang diberikan hanyalah korelasi positif dan linear, dari sini mintalah siswa untuk berdiskusi mengapa istilah positif dan linear digunakan. Mintalah siswa untuk berpikir mengenai istilah-istilah apa yang mungkin

digunakan lagi untuk jenis korelasi lainnya. Respons yang diharapkan adalah negatif dan tidak berkorelasi, dan kurva/non-linear. Meskipun siswa tidak dapat mengeluarkan ide atau gagasan tersebut, siswa dapat diarahkan langsung ke aktivitas di Eksplorasi 3.2 untuk diperkenalkan mengenai jenis korelasi lain yang berada di dalam tabel pada pertanyaan No.1. Mintalah siswa berdiskusi dengan pasangannya untuk mengerjakan semua aktivitas di Eksplorasi 3.2.

Kunci Jawaban Eksplorasi 3.2

1. (a) $\longrightarrow$ A, (b) $\longrightarrow$ A, (c) $\longrightarrow$ B, (d) $\longrightarrow$ C, (e) $\longrightarrow$ D
2. Kategori yang tidak ada adalah E. Berikut ini sampel diagram yang mungkin.

Dari pembahasan Eksplorasi 3.2, mintalah siswa untuk berdiskusi bagaimana mereka dapat menyimpulkan bahwa suatu diagram pencar memiliki bentuk linear atau non-linear. Hal-hal apa saja yang perlu diperhatikan untuk memastikan hal tersebut. Lakukan hal yang sama juga mengenai diagram pencar yang tidak berkorelasi.

Untuk mendapatkan pemahaman tentang jenis korelasi secara utuh, bagian berpikir kritis akan memberikan gambaran kepada siswa mengenai bentuk

trend data yang kurva/non-linear memiliki variansi yang lebih banyak lagi sehingga terkadang mereka tidak dapat mengatakan bahwa diagram pencar tersebut berkorelasi positif ataupun negatif. Contoh, ketika suatu diagram pencar memberikan bentuk kuadratik maka akan sulit mengatakan bahwa data tersebut berkorelasi positif ataupun negatif oleh karena setengah dari kurva tersebut berkorelasi positif dan setengah bagian lainnya berkorelasi negatif.

Selanjutnya, mintalah siswa untuk mengerjakan Latihan 3.2 untuk menguatkan kompetensi membaca diagram dan menentukan jenis korelasi dan interpretasinya. Kunci jawaban Latihan 3.2 ada di bagian bawah bagian ini.

Ayo Menggunakan Teknologi

Pada akhir subbab ini, perkenalkan penggunaan teknologi, dalam hal ini *Microsoft Excel* untuk menggambar diagram pencar. Guru juga dapat memperkenalkan aplikasi lain yang mungkin dipertimbangkan akan lebih efektif digunakan sesuai dengan kondisi sekolah. Tampilan gambar pada panduan mungkin akan berbeda karena perbedaan versi *Microsoft Excel*. Jika perbedaan yang ada cukup signifikan maka guru perlu mempersiapkan materi terpisah yang sesuai dengan versi *Microsoft Excel* yang digunakan di sekolah.

Diferensiasi

Siswa yang menyelesaikan latihan lebih cepat dapat diminta untuk mencari relasi antara dua variabel yang mereka ingin ketahui dan merancang penelitian sederhana untuk memperoleh data bivariat dan menggambar diagram pencarnya untuk proses analisis secara grafis sesuai konten yang telah dipelajari pada subbab ini. Data ini dapat disimpan untuk analisis lebih lanjut setelah menyelesaikan subbab berikutnya.

Kunci Jawaban Latihan 3.1

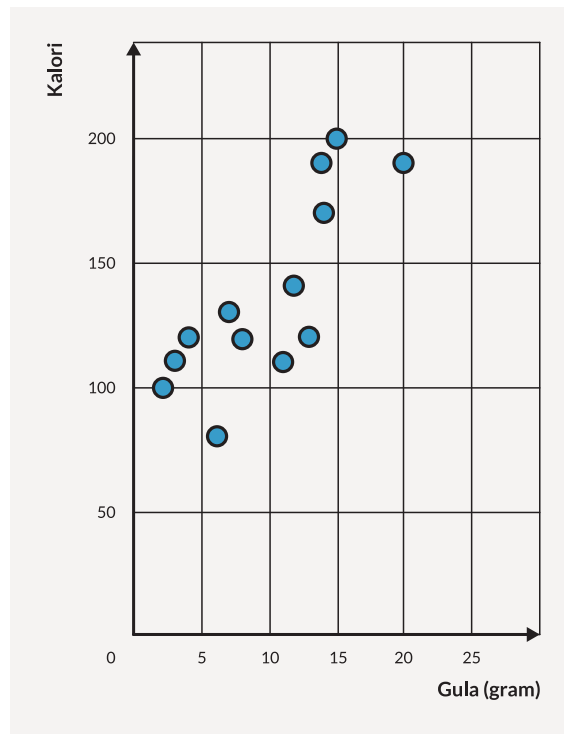
1. a) Semakin banyak kendaraan bermotor, semakin meningkat tingkat polusi udara. Alasan: kendaraan bermotor menghasilkan polusi udara dari asap kendaraan bermotor.

   b) Semakin jauh jarak yang ditempuh oleh sebuah motor, semakin berkurang volume bensin dalam tangki bensin. Alasan: kendaraan bermotor menggunakan bensin sebagai sumber tenaga untuk bergerak.

   c) Tidak ada hubungan antara biaya listrik dan biaya air. Alasan: penggunaan listrik dan air bersifat terpisah.

2. a) Titik-titik mempunyai kecenderungan semakin menurun ke bawah jika dilihat dari kiri atas ke kanan bawah.

   b) Semakin tinggi persentase kelulusan SMA maka semakin rendah persentase kemiskinan.

3. a) Diagram *scatter*

   b) Titik-titik mempunyai kecenderungan semakin naik ke atas jika dilihat dari kiri bawah ke kanan atas.

c) Semakin tinggi kandungan gula maka semakin tinggi kalorinya.

4. a) Proses pertumbuhan anak usia dini

   b) Tidak, akan ada di mana kondisi tinggi badan tidak akan bertambah lagi pada saat sudah mencapai usia tertentu.

   c) Perlu mengambil data tinggi badan tambahan dari umur 8 tahun hingga minimal rata-rata umur manusia meninggal atau di atasnya.

Kunci Jawaban Latihan 3.2

a) i. Jenis korelasi: korelasi positif

   ii. Bentuk trend data: linear

   iii. Interpretasi: semakin meningkat nilai variabel x, semakin meningkat nilai variabel y

b) i. Jenis korelasi: korelasi negatif

   ii. Bentuk trend data: linear

   iii. Interpretasi: semakin meningkat nilai variabel x, semakin menurun nilai variabel y

c) i. Jenis korelasi: korelasi positif

   ii. Bentuk trend data: linear

   iii. Interpretasi: semakin meningkat nilai variabel x, semakin meningkat nilai variabel y

d) i. Jenis korelasi: korelasi negatif

   ii. Bentuk trend data: linear

   iii. Interpretasi: semakin meningkat nilai variabel x, semakin menurun nilai variabel y

e) i. Jenis korelasi: korelasi positif

   ii. Bentuk trend data: linear

   iii. Interpretasi: semakin meningkat nilai variabel x, semakin meningkat nilai variabel y

f) i. Jenis korelasi: korelasi negatif

   ii. Bentuk trend data: kurva/non-linear

   iii. Interpretasi: semakin meningkat nilai variabel x, semakin menurun nilai variabel y

g) i. Jenis korelasi: korelasi negatif

ii. Bentuk trend data: kurva/non-linear

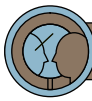
iii. Interpretasi: semakin meningkat nilai variabel x, semakin menurun Nilai variabel y

h) i. Jenis korelasi: korelasi positif

ii. Bentuk trend data: kurva/non-linear

iii. Interpretasi: semakin meningkat nilai variabel x, semakin meningkat nilai variabel y

Diferensiasi

Bagi siswa yang kecepatan belajarnya tinggi (*advanced*), minta mereka mengerjakan Latihan tanpa bantuan. Pada saat yang sama, guru dapat mendampingi siswa yang mengalami kesulitan.

Ayo Berefleksi

Tutup pembelajaran dengan meminta siswa melakukan refleksi terhadap apa yang sudah mereka pelajari dengan menuliskannya secara eksplisit materi yang sudah dipelajari dan refleksi aspek lain melalui pertanyaan penuntun.

B. Regresi Linear

Pengalaman Belajar

- Siswa melakukan eksplorasi berdasarkan instruksi dan pertanyaan terpandu.
- Siswa berdiskusi dengan sesama siswa dalam eksplorasi dan mengambil kesimpulan bersama.
- Siswa mempelajari konsep-konsep yang digunakan di balik eksplorasi yang dilakukan dan membandingkan kesimpulan yang telah diambil sebelumnya.

- Siswa menerapkan konsep yang benar dalam permasalahan baru.
- Siswa membagikan hasil pengerjaan mereka kepada siswa lain untuk bertukar ide atau gagasan serta memperbaiki konsep yang salah jika ada.
- Siswa menggunakan teknologi dalam pembelajaran.

Sarana & Prasarana Pembelajaran

- Buku teks siswa
- Kertas grafik atau milimeter blok
- Penggaris
- Kalkulator
- Aplikasi *Microsoft Excel*

Apersepsi

Ingatkan siswa tentang diagram pencar atau diagram *scatter* dan mengenai arah dan bentuk trend dari data bivariat yang telah dipelajari pada subbab sebelumnya.

Perkenalkan bab ini dengan membahas bentuk trend yang linear yang memungkinkan untuk dimodelkan dengan suatu garis lurus sehingga dapat digunakan untuk analisis lebih lanjut.

Gunakan bagian **Mengingat Kembali** mengenai persamaan garis lurus yang sudah dipelajari di SMP dan rata-rata dan varians yang sudah dipelajari di SMA. Pertanyaan-pertanyaan berikut dapat digunakan untuk mengaktifkan prapengetahuan siswa:

- Apa saja komponen dari suatu garis lurus?
- Misalkan ada persamaan garis lurus $y = 2x + 1$. Jelaskan nama dan makna masing-masing bagian, y, $2x$ dan $+1$.
- Bagaimana cara menggambarkan suatu persamaan garis lurus?
- Apa makna dari rata-rata dari suatu data?
- Apa makna dari varians dari suatu data?

Pemanasan

Ayo Berpikir Kritis

Gunakan pengantar subbab untuk membuat siswa berpikir bagaimana cara menggambar garis lurus yang tepat untuk pemodelan suatu data bivariat. Mintalah siswa untuk memilih garis mana menurut mereka yang paling tepat sebagai model dari data pada diagram pencar pada Gambar 3.5 sesuai dengan aktivitas pada saat pemanasan. Biarkanlah jawaban menggantung dan beri tahukan kepada siswa bahwa mereka akan mengetahui dengan pasti kapan suatu garis sudah tepat dengan metode yang akan diajarkan kepada mereka pada subbab ini.

Guru perlu menekankan beberapa hal mengenai garis regresi yang tidak perlu selalu melalui titik-titik pada diagram pencar dan tentang sifat bahwa garis regresi selalu melalui titik $(\bar{x}, \bar{y})$ seperti pada Gambar 3.6.

Sebelum memulai pembelajaran lebih lanjut, berikan pertanyaan kepada siswa pada bagian berpikir kritis: Dapatkah kalian menggunakan model regresi linear sebagai model dari suatu data bivariat yang mempunyai bentuk trend yang tidak menunjukkan bentuk linear? Guru dapat mengarahkan siswa untuk berpikir menggunakan Gambar 3.7. Pada diagram pencar dengan variabel x_1 dan y_1, siswa diajak berpikir untuk memprediksi garis *best-fit* karena data masih terlihat linear. Pada diagram pencar dengan variabel x_2 dan y_2, siswa diajak berpikir untuk melihat bahwa itu adalah kurva/non-linear. Pada diagram pencar dengan variabel x_3 dan y_3, siswa diajak untuk berpikir mengenai kondisi yang sudah linear namun terdapat data pencilan yang akan membuat garis *best-fit* bergeser dari titik-titik yang seharusnya sudah membentuk garis lurus. Pada gambar diagram pencar dengan variabel x_4 dan y_4, siswa diajak berpikir untuk melihat bahwa terdapat pola non-linear namun bukan membentuk kurva.

Pastikan siswa menjawab regresi linear tetap dapat digunakan meskipun tidak terlihat linear. Jika bentuknya jelas terlihat membentuk kurva/non-linear maka harus menggunakan pendekatan kurva/non-linear juga supaya lebih tepat hasil prediksinya sedangkan jika bentuknya tidak pasti namun

masih terlihat seperti garis linear, maka dapat menggunakan regresi linear. Pastikan ke siswa bahwa mereka tidak akan mempelajari bentuk model kurva/non-linear pada jenjang ini. Jadi, mereka akan selalu menggunakan garis regresi untuk pemodelan.

Penjelasan Pembelajaran di Buku Siswa

Pada setiap bagian terdapat eksplorasi, penjelasan konten sesuai eksplorasi atau pengenalan konten baru dan ditutup dengan latihan. Guru dapat mengikuti susunan materi buku dari awal bab sebagai panduan proses pembelajaran siswa. Guru dapat memperhatikan poin-poin di bawah ini sebagai penekanan penting hal umum yang diharapkan oleh konten buku ini.

Siswa perlu memahami konsep diagram *scatter* dan siswa sudah selalu diminta untuk menggambar sendiri pada buku sendiri atau pada milimeter blok.

Siswa diberikan kesempatan untuk menganalisis setiap diagram *scatter* yang digambarkan sehingga akan terbiasa dengan melihat arah dan bentuk trend data serta memprediksi posisi garis secara intuitif yang nantinya akan mereka pastikan dengan menghitung persamaan garis regresi menggunakan rumus yang akan diajarkan. Setelah itu, persamaan garis regresi akan digunakan untuk interpolasi dan ekstrapolasi data.

Latihan diberikan pada setiap akhir eksplorasi untuk menguatkan kompetensi dalam menggambar diagram *scatter*, menentukan persamaan garis regresi, menggambar garis regresinya pada diagram *scatter* dan melakukan interpolasi dan ekstrapolasi data. Gunakan kesempatan ini untuk mengevaluasi ulang miskonsepsi, proses perhitungan dan interpretasi yang salah.

Miskonsepsi

Kesalahan meletakkan data menggunakan konsep titik koordinat di mana posisi x dan y yang tertukar sehingga merusak pola atau trend data yang mengakibatkan kesalahan kesimpulan.

Kesalahan dalam tertukarnya nilai x dan y pada saat perhitungan.

Kesalahan dalam tertukarnya nilai a dan b pada saat substitusi ke persamaan garis regresi.

Kesalahan dalam interpretasi konteks misalnya volume bensin dan tinggi yang tidak mungkin negatif akibat dari ekstrapolasi berlebih tanpa memperhatikan konteks.

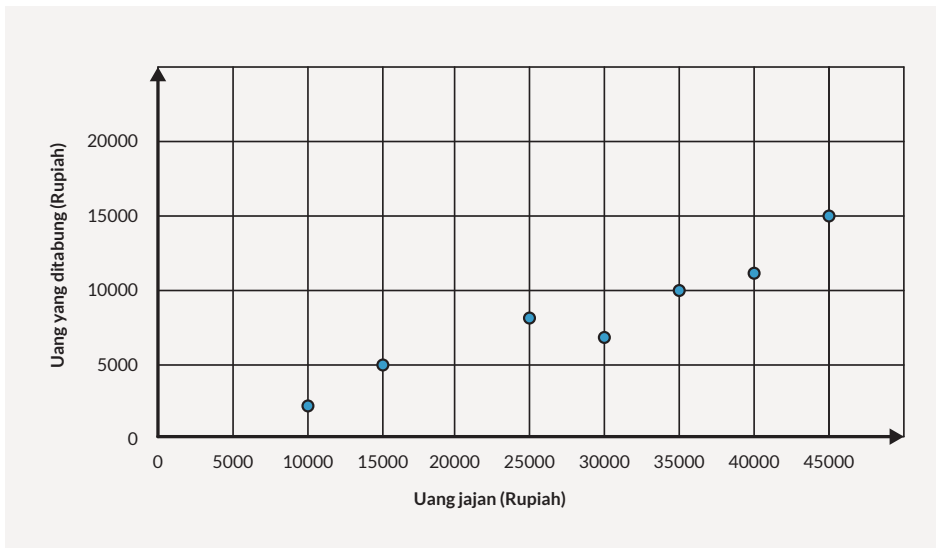
Kesalahan dalam interpretasi nilai gradien pada garis lurus misalnya untuk setiap nilai turun 10 poin, jam bermain bertambah 1 jam. Seharusnya, setiap jam bermain bertambah 1 jam, nilai turun 10 poin.

Metode & Aktivitas Pembelajaran

Guru perlu memperhatikan kegiatan pemanasan pada bagian di atas sebelum melanjutkan ke bagian ini.

Guru memberitahukan bahwa mereka akan bereksplorasi dalam proses menemukan cara yang pasti untuk menemukan garis yang tepat. Mintalah siswa untuk melakukan Eksplorasi 3.3 No. 1–3 secara mandiri dan ketika sudah selesai semua, maka guru akan meminta mereka untuk mengerjakan No. 4–5.

Kunci Jawaban Eksplorasi 3.3 (No. 1–5)

1. Diagram pencar

2. (jawaban masing-masing siswa)
3. (jawaban masing-masing siswa)
4. (jawaban masing-masing siswa)
5. (jawaban masing-masing siswa)
   Guru memastikan siswa mengambil kesimpulan yang tepat.

Setelah siswa berdiskusi maka simpulkanlah bersama bagaimana cara mendapatkan garis yang paling tepat. Harapan jawaban adalah semakin dekat garis ke semua titik-titik pada diagram pencar maka semakin tepat garis tersebut.

Dengan kesimpulan di atas, perkenalkan istilah metode kuadrat terkecil. Disertai dengan pemecahan nama metode yang menjadi dua kata "kuadrat" dan "terkecil". Terkecil di sinilah yang memiliki relevansi dengan kesimpulan mereka di Eksplorasi 3.3 No. 1–5.

Tahukah Kamu?

Bagian ini merupakan tambahan pengetahuan mengenai penemu-penemu metode tersebut pada bagian "Tahukah Kalian?".

Perkenalkan konsep residu ke siswa dan perkenalkan definisinya sebelum masuk ke rumusnya supaya mendapatkan makna mengapa rumusnya seperti itu. Ajaklah siswa berpikir bagaimana residu berperan dalam menemukan garis yang tepat.

Setelah itu perkenalkan operasi kuadrat yang dilakukan pada residu sebagai proses untuk memperoleh garis yang paling tepat. Di mana semakin kecil jumlah kuadrat residu, maka garis tersebut semakin tepat. Mintalah siswa melanjutkan Eksplorasi 3.3 (No. 6–8) untuk menerapkan konsep residu kuadrat terkecil.

Kunci Jawaban Eksplorasi 3.3 (No. 6–8)

6. (jawaban masing-masing siswa)

   Guru memastikan siswa menghitung dengan tepat.
7. (jawaban masing-masing siswa)

   Guru memastikan siswa menghitung dengan tepat.
8. (jawaban masing-masing siswa)

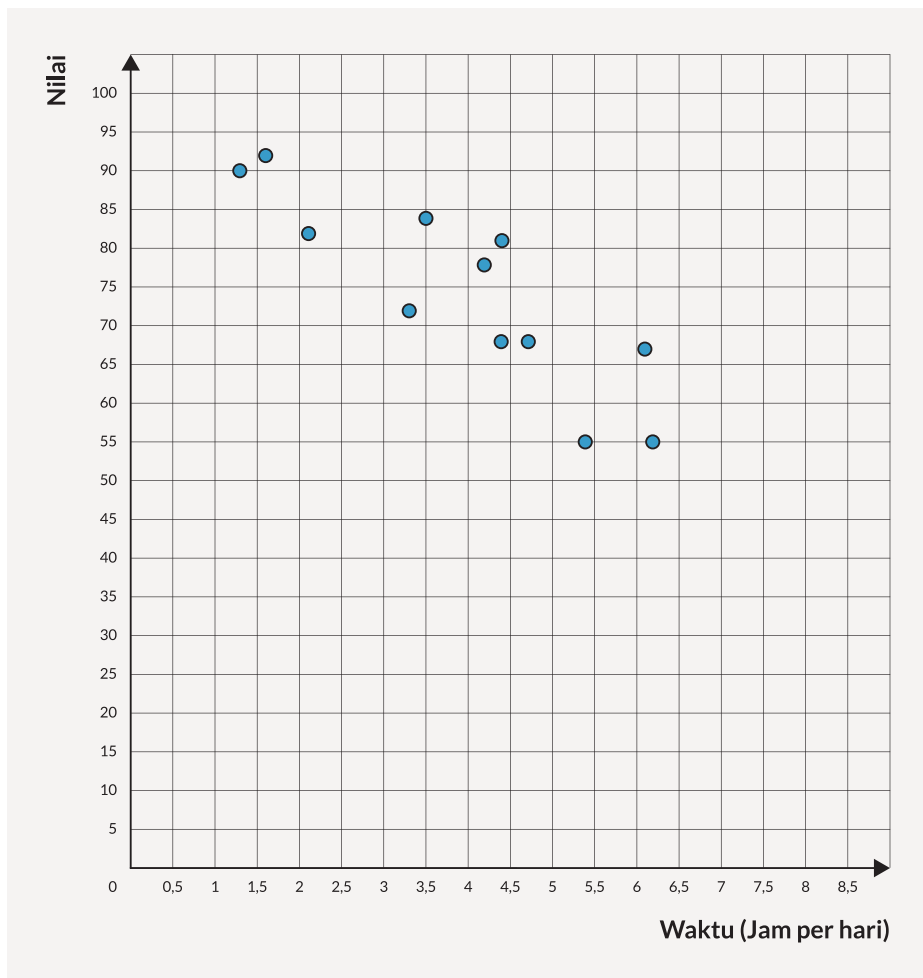
   Guru memastikan siswa mengambil kesimpulan yang tepat.

Setelah membandingkan, ajaklah siswa membandingkan kondisi garis secara visual dan perhitungan residu mereka apakah sudah relevan bahwa semakin kecil jumlah kuadrat residu, maka garis juga akan semakin tepat yaitu semakin dekat ke titik-titik yang ada pada diagram pencar. Simpulkanlah bersama semua siswa dan tutuplah dengan meminta siswa mengerjakan Latihan 3.3 untuk menguatkan kompetensi mereka.

Pada tahap selanjutnya, perkenalkan cara menentukan persamaan garis regresi menggunakan rumus. Perkenalkan secara bertahap dari mencari nilai b terlebih dahulu, dan kemudian nilai a dan pada akhirnya mendapatkan persamaan garis regresinya. Konsep gradien merupakan hal yang penting di sini untuk interpretasi nilai b. Oleh karena itu, pastikan siswa sudah

mengetahui arti gradien bukan sekadar kemiringan garis namun juga merupakan tingkat perubahan misalnya untuk gradien bernilai 5 maka artinya setiap kenaikan 1 poin variabel x maka variabel y meningkat 5 poin. Setelah itu mintalah siswa melakukan Eksplorasi 3.4 untuk menerapkan konsepnya dan melakukan analisis lanjutan.

Kunci Jawaban Eksplorasi 3.4

1. Diagram pencar

2. Ya, ada hubungan linear.
3. a) $\overline{x} = 3{,}9333$ dan $\overline{y} = 74{,}3333$

   b) $SS_{xy} = -191{,}0333$ dan $SS_{xx} = 29{,}4067$

   c) $b = -6{,}496$

d) $a =$ 99,884

e) $\hat{y}$ = 99,884 − 6,496x

Catatan: perhitungan sangat sensitif dengan pembulatan sehingga ada kemungkinan jawaban siswa berbeda. Direkomendasikan bahwa semua perhitungan nilai sementara menggunakan 4 angka di belakang koma dan jawaban akhir 3 angka di belakang koma.

4. Nilai a artinya jika waktu yang digunakan untuk menggunakan media sosial adalah 0 jam per hari maka nilainya adalah 99,884.

   Nilai b artinya setiap waktu yang digunakan untuk menggunakan media sosial naik 1 jam maka nilai akan turun sebesar 6,496.

5. $\hat{y}$ = 99,884 − 6,496(3,8) =75,2

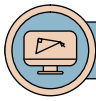
   Prediksi nilai siswa yang menggunakan rata-rata waktu 3,8 jam per hari untuk media sosial adalah 75,2

6. $\hat{y}$ = 99,884 − 6,496(16) = −4,1

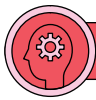
   Prediksi nilai siswa yang menggunakan rata-rata waktu 16 jam per hari untuk media sosial adalah -4,1. Prediksi ini adalah sesuai yang sangat tidak mungkin karena nilai tidak mungkin negatif. Prediksi seperti ini juga tidak memungkinkan karena jauh dari data hasil observasi.

Perkenalkan konsep interpolasi dan ekstrapolasi yang telah siswa lakukan pada Eksplorasi 3.4.

Mintalah siswa berdiskusi mengenai reliabilitas ekstrapolasi dan simpulkan kapan ekstrapolasi dapat dilakukan dan kapan ekstrapolasi tidak mungkin dilakukan. Simpulkanlah bersama dengan semua siswa sehingga siswa peka akan kondisi interpolasi dan ekstrapolasi yang tepat.

Selanjutnya, mintalah siswa mengerjakan Latihan 3.4 untuk menguatkan kompetensi mereka dalam menentukan persamaan garis regresi dan interpretasinya.

Ayo Menggunakan Teknologi

Pada akhir subbab ini, perkenalkan penggunaan teknologi, dalam hal ini *Microsoft Excel* untuk menggambar garis regresi linear dan menampilkan persamaan garis regresi linear. Guru juga dapat memperkenalkan aplikasi lain yang mungkin dipertimbangkan akan lebih efektif digunakan sesuai dengan kondisi sekolah. Tampilan gambar pada panduan mungkin akan berbeda karena perbedaan versi *Microsoft Excel*. Jika perbedaan yang ada cukup signifikan, guru perlu mempersiapkan materi terpisah yang sesuai dengan versi *Microsoft Excel* yang digunakan di sekolah. Guru dapat menggunakan kumpulan data yang berbeda dari yang digunakan oleh buku sesuai dengan konteks sekolah masing-masing.

Setelah persamaan garis regresi ditemukan dengan menggunakan *Microsoft Excel*, mintalah siswa untuk memberikan interpretasi terhadap masing-masing komponen persamaan garis linearnya, dari nilai gradien atau koefisien dari variabel x dan titik potong sumbu y. Guru dapat membimbing dan mengarahkan siswa untuk mencapai interpretasi yang tepat.

Ayo Berpikir Kritis

Setelah penggunaan teknologi ini, mintalah siswa untuk membandingkan jawaban mereka jika mereka menghitung persamaan garis regresi linear sesuai dengan pertanyaan penuntun. Guru dapat menyesuaikan pertanyaan penuntun jika data yang digunakan dalam penggunaan teknologi ini berbeda.

Ayo Berefleksi

Setelah itu, mintalah siswa untuk berdiskusi mengenai perbedaan jawaban yang ada dan efisiensi teknologi, mengapa mereka masih harus belajar menghitung menggunakan rumus jika memang teknologi dapat digunakan untuk menghitung itu dengan cepat? Ajaklah siswa berpikir bahwa pemahaman terhadap konsep dan cara kerja akan memberikan kesempatan setiap siswa untuk berpikir kritis dan menganalisis lebih lanjut mengenai

hal-hal yang mereka hitung, di mana teknologi tidak dapat memberikan hal tersebut dan hanya dapat menampilkan angka atau gambarnya saja.

Siswa yang menyelesaikan latihan lebih cepat dapat diminta untuk melanjutkan analisis data mereka yang sudah dilakukan pada subbab sebelumnya dengan menentukan persamaan garis regresinya.

Kunci Jawaban Latihan 3.3

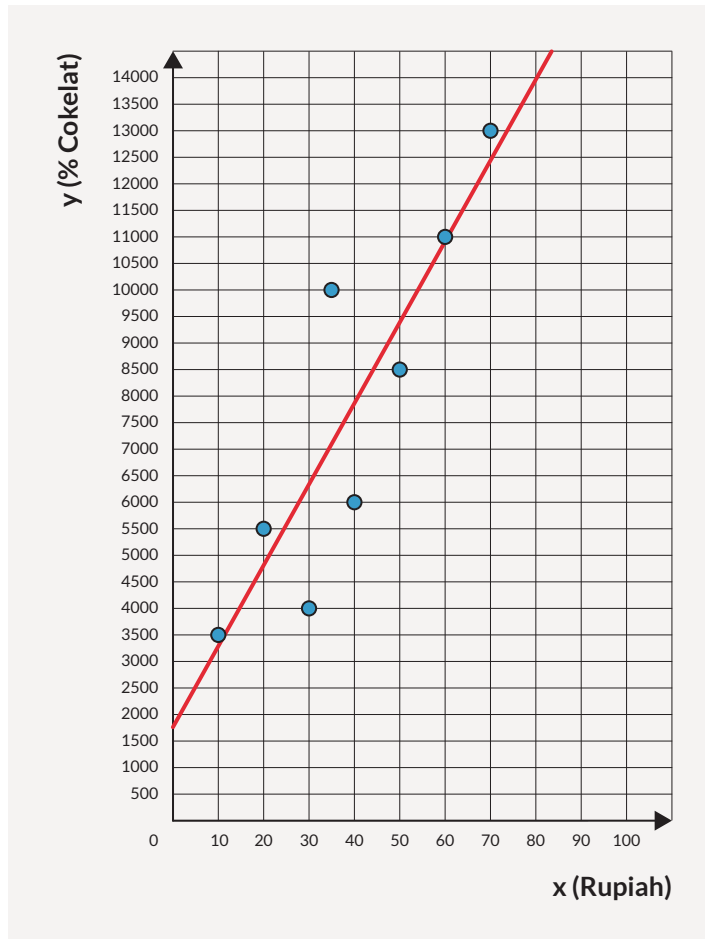
1. Perhitungan residu kuadrat dari $\hat{y} = 367000 + 16000x$

x	y	$\hat{y}$	$y - \hat{y}$	$(y - \hat{y})^2$
50	1.100.000	1.167.000	−67.000	4.489.000.000
100	2.100.000	1.967.000	133.000	17.689.000.000
150	2.700.000	2.767.000	−67.000	4.489.000.000
Jumlah kuadrat residu				26.667.000.000

Perhitungan residu kuadrat dari $\hat{y} = 300000 + 16000x$

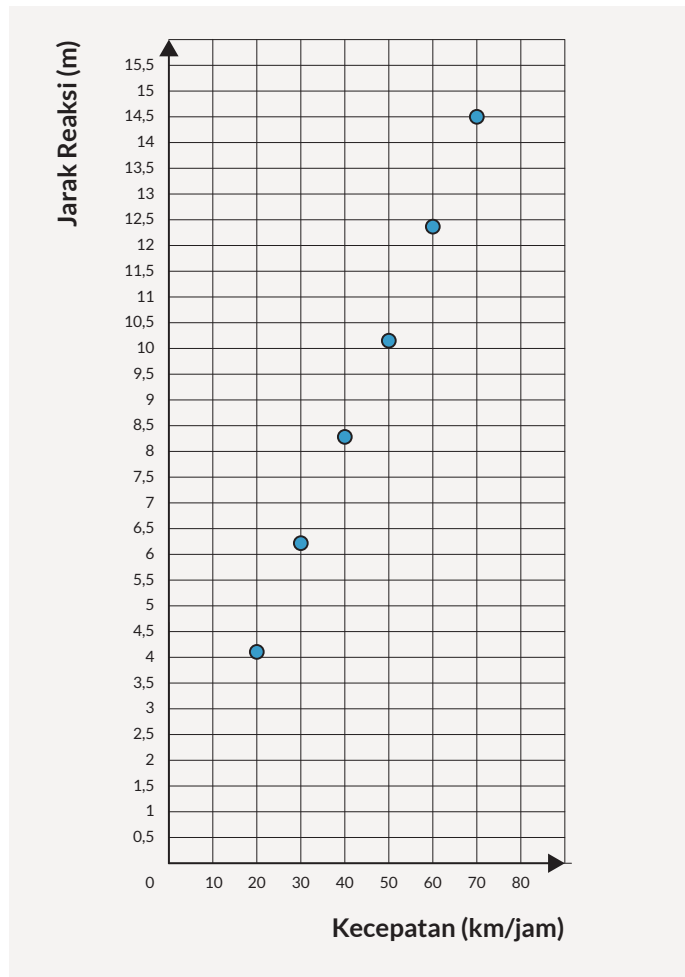
x	y	$\hat{y}$	$y - \hat{y}$	$(y - \hat{y})^2$
50	1.100.000	1.100.000	0	0
100	2.100.000	1.900.000	200.000	40.000.000.000
150	2.700.000	2.700.000	0	0
Jumlah kuadrat residu				40.000.000.000

Oleh karena $\hat{y} = 367000 + 16000x$ mempunyai jumlah kuadrat residu yang lebih kecil dari $\hat{y} = 300000 + 16000x$ maka persamaan garis regresi $\hat{y} = 367000 + 16000x$ merupakan garis yang paling tepat untuk memprediksi banyak tempat duduk terhadap biaya.

2. a) Diagram pencar dan b) Garis regresi

b) Merek cokelat D, karena harga jauh berada di atas garis prediksi harga dibandingkan cokelat yang lainnya.

c) Dengan menggunakan $\hat{y} = 1700 + 154x$, maka ketika $x = 35$ maka prediksi harga yang cocok adalah Rp7.090,00.

Kunci Jawaban Latihan 3.4

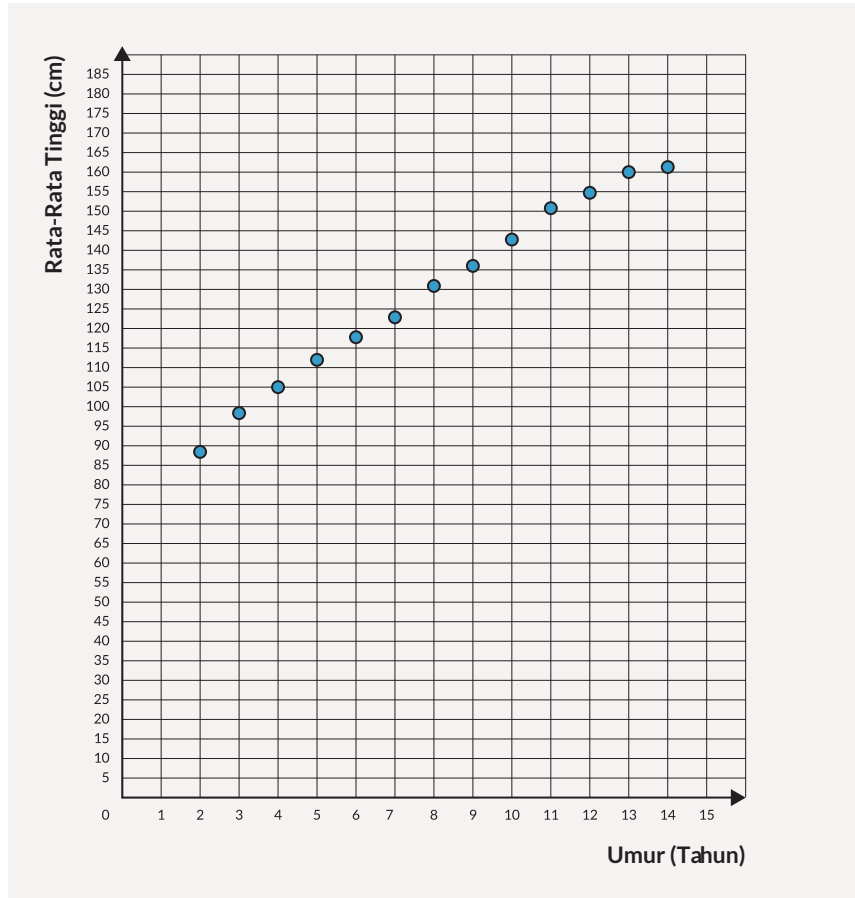
1. a) Diagram pencar

   b) Ya, ada hubungan linear antara kecepatan dengan jarak reaksi.

   c) $\hat{y} = -0{,}042 + 0{,}207x$ (hasil mungkin akan berbeda-beda karena pembulatan di proses perhitungan dan pada akhir perhitungan)

   d) Nilai a artinya ketika kecepatan sama dengan 0 km/jam maka jarak reaksi adalah −0,042 m. Nilai b artinya setiap kali kecepatan meningkat 1 km/jam maka jarak reaksi akan bertambah sebesar 0,207 m.

   e) Dengan menggunakan $\hat{y} = -0{,}042 + 0{,}207x$, maka ketika $x = 35$ km/jam, maka prediksi jarak reaksi adalah 7,2 m.

f) Dengan menggunakan $\hat{y} = -0{,}042 + 0{,}207x$,, maka ketika $x = 55$ km/jam, maka prediksi jarak reaksi adalah 11,343 m.

2. a) Diagram pencar

b) Iya, ada hubungan linear antara umur dengan rata-rata tinggi badan.

c) $\hat{y} = 80{,}066 + 6{,}165x$, (hasil mungkin akan berbeda-beda karena pembulatan di proses perhitungan dan pada akhir perhitungan)

d) Nilai a artinya ketika umur sama dengan 0 tahun maka tinggi badan adalah 80,066 cm. Nilai b artinya setiap kali umur bertambah 1 tahun maka tinggi badan akan bertambah setinggi 6,165 cm.

e) Dengan menggunakan $\hat{y} = 80{,}066 + 6{,}165x$, maka ketika berumur 5,8 tahun, maka prediksi tinggi badan adalah 115,823 cm.

f) Dengan menggunakan $\hat{y} = 80{,}066 + 6{,}165x$, maka ketika berumur 30 tahun, maka prediksi tinggi badan adalah 265,016 cm.

g) Hasil perhitungan pada bagian f) tidak reliabel karena tingginya sudah melewati batas wajar pertumbuhan manusia pada umumnya. Hal ini dikarenakan ekstrapolasi yang berlebih dari data hasil observasi.

Diferensiasi

Bagi siswa yang kecepatan belajarnya tinggi (*advanced*), minta mereka mengerjakan Latihan tanpa bantuan. Pada saat yang sama, guru dapat mendampingi siswa yang mengalami kesulitan.

Ayo Berefleksi

Tutup pembelajaran dengan meminta siswa melakukan refleksi terhadap apa yang sudah mereka pelajari dengan menuliskannya secara eksplisit materi yang sudah dipelajari dan refleksi aspek lain melalui pertanyaan penuntun.

C. Analisis Korelasi

- Siswa melakukan eksplorasi berdasarkan instruksi dan pertanyaan terpandu.
- Siswa berdiskusi dengan sesama siswa dalam eksplorasi dan mengambil kesimpulan bersama.
- Siswa mempelajari konsep-konsep yang digunakan di balik eksplorasi yang dilakukan dan membandingkan kesimpulan yang telah diambil sebelumnya.
- Siswa menerapkan konsep yang benar dalam permasalahan baru.
- Siswa membagikan hasil pengerjaan mereka kepada siswa lain untuk bertukar ide atau gagasan serta memperbaiki konsep yang salah jika ada.
- Siswa menggunakan teknologi dalam pembelajaran.

Sarana & Prasarana Pembelajaran

- Buku teks siswa
- Kertas grafik atau milimeter blok
- Penggaris
- Kalkulator
- Aplikasi *Microsoft Excel*

Apersepsi

Ingatkan siswa tentang diagram pencar atau diagram *scatter* dan mengenai arah dan bentuk trend dari data bivariat yang telah dipelajari pada subbab A dan residu, metode kuadrat terkecil dan persamaan garis regresi pada subbab B.

Perkenalkan bab ini dengan membahas bentuk trend yang linear yang memungkinkan untuk dimodelkan dengan suatu garis lurus sehingga dapat digunakan untuk analisis lebih lanjut. Namun, kali ini kita akan menggunakan nilai atau angka secara spesifik untuk melakukan analisis terhadap garis regresi tersebut.

Pemanasan

Ayo Berkomunikasi

Gunakan pengantar subbab untuk membuat siswa berpikir bagaimana mereka dapat mengemukakan alasan mereka ketika mereka mengatakan tinggi badan seseorang adalah tinggi atau pendek. Biarkan siswa berdiskusi dan memberikan argumen mereka. Setelah itu mintalah beberapa siswa untuk memberikan alasan mereka sehingga siswa akan sadar bahwa tidak ada standar yang ditetapkan dan masing-masing menggunakan standar mereka sehingga interpretasi dapat berbeda-beda.

Perkenalkan istilah koefisien korelasi dan koefisien determinasi kepada siswa.

Berikutnya mintalah siswa berdiskusi lagi mengenai koefisien determinasi yang menggantikan jumlah kuadrat residu terkecil dalam analisis korelasi ini. Biarkan siswa berdiskusi dan mengemukakan argumen mereka. Pastikan siswa menyadari bahwa nilai jumlah kuadrat residu terkecil yang mereka dapatkan tidak mempunyai standar yang pasti apakah itu sudah terkecil atau tidak dan hanya akan dapat diketahui lebih tepat atau tidak saat mereka membandingkan dengan jumlah kuadrat residu terkecil dari garis regresi lain seperti pada saat mereka saling membandingkan jumlah kuadrat residu garis-garis yang telah mereka buat pada eksplorasi sebelumnya.

Penjelasan Pembelajaran di Buku Siswa

Pada setiap bagian terdapat eksplorasi, penjelasan konten sesuai eksplorasi atau pengenalan konten baru dan ditutup dengan latihan. Guru dapat mengikuti susunan materi buku dari awal bab sebagai panduan proses pembelajaran siswa. Guru dapat memperhatikan poin-poin di bawah ini sebagai penekanan penting hal umum yang diharapkan oleh konten buku ini.

Siswa perlu memahami konsep diagram *scatter* dan siswa sudah selalu diminta untuk menggambar sendiri pada buku sendiri atau pada milimeter blok.

Siswa diberikan kesempatan untuk menganalisis setiap diagram *scatter* yang digambarkan sehingga akan terbiasa dengan melihat arah dan bentuk trend data serta memprediksi posisi garis secara intuitif yang nantinya akan mereka pastikan dengan menghitung persamaan garis regresi menggunakan rumus yang akan diajarkan. Tidak berhenti di situ saja, siswa perlu menghitung koefisien korelasi dan koefisien determinasi untuk analisis lanjutan dan akan diarahkan untuk menggabungkan semua ilmu yang telah dipelajari dalam bab ini untuk menginterpretasikan secara menyeluruh suatu konteks.

Latihan diberikan pada setiap akhir eksplorasi untuk menguatkan kompetensi dalam menggambar diagram *scatter*, menentukan persamaan garis regresi, menggambar garis regresinya pada diagram *scatter*, menentukan koefisien korelasi dan koefisien determinasi, dan melakukan interpretasi.

Gunakan kesempatan ini untuk mengevaluasi ulang miskonsepsi, proses perhitungan dan interpretasi yang salah.

Kesalahan meletakkan data menggunakan konsep titik koordinat di mana posisi x dan y yang tertukar sehingga merusak pola atau trend data yang mengakibatkan kesalahan kesimpulan.

Kesalahan dalam tertukarnya nilai x dan y pada saat perhitungan.

Kesalahan dalam tertukarnya nilai a dan b pada saat substitusi ke persamaan garis regresi.

Kesalahan dalam interpretasi konteks misalnya volume bensin dan tinggi yang tidak mungkin negatif akibat dari ekstrapolasi berlebih tanpa memperhatikan konteks.

Kesalahan dalam interpretasi nilai gradien pada garis lurus misalnya untuk setiap nilai turun 10 poin, jam bermain bertambah 1 jam. Seharusnya, setiap jam bermain bertambah 1 jam, nilai turun 10 poin.

Kesalahan dalam tertukarnya nilai dan interpretasi r dan r^2.

Kesalahan memberikan tanda + atau − pada saat menentukan r dari r^2.

Kesalahan karena hanya fokus pada perhitungan r sehingga kadang tidak menyadari bahwa hasil perhitungan tidak relevan dengan arah trend data pada diagram pencar.

Metode & Aktivitas Pembelajaran

Guru perlu memperhatikan kegiatan pemanasan pada bagian di atas sebelum melanjutkan ke bagian ini.

Guru memperkenalkan bahwa ada beberapa perhitungan koefisien korelasi namun yang digunakan pada pembelajaran ini adalah korelasi *product moment* beserta dengan beberapa istilah yang sering digunakan.

Tahukah Kamu?

Bagian ini merupakan tambahan pengetahuan tentang biografi Pearson dan kontribusinya di bidang statistika.

Perkenalkan tambahan satu jenis jumlah kuadrat variabel yaitu SS_{yy} yang diperlukan bersama dengan SS_{xy} dan SS_{xx} untuk menghitung nilai r. Setelah itu perkenalkan nilai rentang r yang pasti.

Mintalah siswa berdiskusi dalam kelompok mengenai Gambar 3.10 dan 3.11 untuk mengambil kesimpulan tentang interpretasi nilai r dengan menggunakan tautan interaktif yang dapat digunakan sebagai simulasi penyebaran data dari garis regresi dan nilai r yang diberikan.

Setelah selesai, simpulkan bersama interpretasi nilai r. Guru dapat menggunakan pertanyaan yang ada sebagai pertanyaan penuntun.

Kemudian dilanjutkan dengan memperkenalkan tingkat hubungan koefisien korelasi pada Tabel 3.2. Pastikan siswa memahami bahwa interval tersebut ada kemungkinan berbeda dengan model lainnya namun dalam buku ini mereka akan menggunakan interval yang diberikan dan deskripsinya untuk semua permasalahan yang mereka temukan dalam buku ini.

Setelah itu ajaklah siswa untuk melakukan Eksplorasi 3.5 untuk menerapkan apa yang telah mereka pelajari sekaligus melihat konteks membuktikan pernyataan seseorang akan hubungan antar variabel.

Pastikan siswa menyiapkan peralatan yang dibutuhkan untuk eksplorasi ini. Jawaban dari eksplorasi ini sangat bergantung pada data yang diperoleh siswa yang bekerja sama di dalam kelas sehingga guru perlu mengantisipasi kemungkinan yang terjadi. Hal yang paling perlu diperhatikan adalah

pastikan siswa mengerti data yang perlu diambil dan juga tepat melakukan pengukuran.

Kunci Jawaban Eksplorasi 3.5

a) (jawaban masing-masing siswa)

b) (jawaban masing-masing siswa)

c) (jawaban masing-masing siswa)

d) (jawaban masing-masing siswa)

e) (jawaban masing-masing siswa)

f) (jawaban masing-masing siswa)

Penguatan Karakter

Setelah siswa selesai melakukan Eksplorasi 3.5, berikan penguatan karakter sesuai dengan konteks Eksplorasi 3.5, mengenai kondisi tubuh manusia yang indah karena manusia adalah ciptaan Tuhan yang indah. Ajaklah siswa untuk menjaga tubuh mereka dan menghargai perbedaan fisik yang mereka temukan dalam kehidupan sehari-hari.

Setelah itu ajaklah siswa untuk memikirkan kembali konteks pengaruh atau akibat dari kebakaran hutan pada pengantar bab ini. Beri tahukan kepada mereka bahwa dengan data yang tepat, mereka sudah dapat mengambil kesimpulan yang baik dan tepat jika mereka menerapkan ilmu statistika yang telah mereka pelajari sejauh ini.

Ayo Berpikir Kreatif

Pada bagian ini, mintalah siswa untuk memikirkan kasus asli atau nyata lain jika diberikan kondisi-kondisi r untuk melatih cara berpikir kreatif. Jika siswa kesulitan, guru dapat memberikan contoh terlebih dahulu.

Setelah itu, mintalah siswa mengerjakan Latihan 3.5 untuk menguatkan kompetensi mereka dalam menentukan koefisien korelasi dan interpretasinya.

Pada bagian berikutnya perkenalkan definisi koefisien determinasi yang menggunakan simbol r^2. Ajaklah siswa berpikir bagaimana mendapatkan r^2

jika mereka sudah bisa menghitung nilai *r* pada bagian sebelumnya. Jika siswa sudah mengetahui bahwa perkenalkan rumus r^2 yang hanya merupakan kuadrat dari *r*. Ingatkan kepada siswa bahwa rumus r^2 hanya bersifat pilihan karena mereka hanya perlu menghitung nilai *r* dan menguadratkan nilai *r* tersebut.

Mintalah siswa untuk membuktikan rentang nilai r^2 menggunakan dasar rentang nilai *r*. Jika siswa kesulitan, guru dapat membuat tabel yang memiliki dua baris di mana baris pertama merupakan deretan nilai-nilai *r* dengan interval 0,1 dimulai dari −1 hingga 1, dan baris kedua merupakan nilai r^2 yang dihitungkan berdasarkan nilai *r* di baris pertama. Mintalah siswa melihat rentang nilai r^2 dan mintalah mereka menjelaskan polanya serta mengambil kesimpulan.

Tekankan pada pengubahan nilai r^2 yang dikalikan dengan 100 untuk mendapatkan nilai persentase seperti contoh yang diberikan pada Buku Siswa dan interpretasinya. Setelah itu ajaklah siswa untuk melakukan Eksplorasi 3.6 untuk menerapkan konsep dan interpretasi nilai r^2.

Kunci Jawaban Eksplorasi 3.6

1. (jawaban masing-masing siswa)

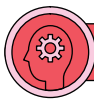
   Harapannya siswa membaca garis regresi sehingga akan berkisar antara 95−100.
2. Bertambah 0,997
3. IQ = 0,997 × 54 + 45 = 98,838. Kurang yakin, karena banyak data yang tersebar dari garis regresi.
4. Karena r = 0,138 maka $r^2 = (0{,}138)^2 = 0{,}019$ atau 1,9%, 1,9% dari IQ diterangkan oleh lingkar kepala.
5. 100% − 1,9% = 99,1%, 99,1% dari IQ diterangkan oleh variabel-variabel lainnya.
6. (jawaban masing-masing siswa)

Pada tahap ini siswa pasti sudah menyadari betapa kompleksnya jika mereka perlu menggabungkan berbagai informasi dalam satu waktu untuk

melakukan analisis dan interpretasi akan suatu data pada suatu konteks. Bantulah kebingungan siswa akan aspek-aspek yang mungkin mereka sedang pertanyakan di dalam pikiran mereka akan hubungan antar informasi dengan yang lainnya. Berikan penguatan karakter bahwa hal ini penting mereka pikirkan dan pelajari karena kesimpulan dan interpretasi data sangat penting bagi kehidupan manusia sehingga kesimpulan dan interpretasi yang tepat akan memberikan manfaat bagi kita semua.

Setelah itu, mintalah siswa mengerjakan Latihan 3.6 untuk menguatkan kompetensi mereka dalam menentukan koefisien determinasi dan interpretasinya.

Ayo Menggunakan Teknologi

Pada akhir subbab ini, perkenalan penggunaan teknologi, dalam hal ini *Microsoft Excel* untuk menampilkan nilai koefisien determinasi (r^2). Guru juga dapat memperkenalkan aplikasi lain yang mungkin dipertimbangkan akan lebih efektif digunakan sesuai dengan kondisi sekolah. Tampilan gambar pada panduan mungkin akan berbeda karena perbedaan versi *Microsoft Excel*. Jika perbedaan yang ada cukup signifikan maka guru perlu mempersiapkan materi terpisah yang sesuai dengan versi *Microsoft Excel* yang digunakan di sekolah.

Ayo Berpikir Kritis

Setelah itu, ajaklah siswa untuk berpikir bagaimana caranya menentukan r jika diketahui nilai r^2. Pastikan bukan hanya sekadar menggunakan operasional akar kuadrat tetapi juga perhatikan bahwa ada 2 kemungkinan jawaban + atau − akibat dari akar kuadrat tersebut sehingga siswa perlu memilih dengan memperhatikan arah trend dari diagram pencar dan bukan hanya sekadar menebak.

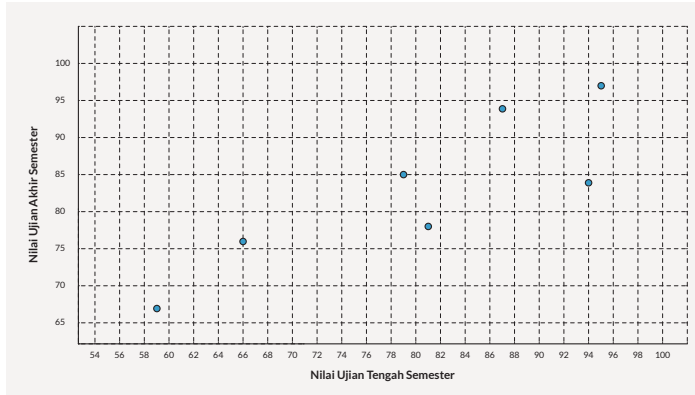
Guru dapat menjelaskan penggunaan *Microsoft Excel* untuk menghitung koefisien korelasi dengan sintaks CORREL dan langsung mempraktikkan hal ini.

Mintalah siswa menerapkan penggunaan teknologi ini pada kasus permasalahan nyata yaitu pengaruh tingkat inflasi terhadap nilai tukar rupiah terhadap dolar AS dan memberikan interpretasi mereka terhadap koefisien determinasi yang ditemukan serta mintalah siswa berpikir lebih luas mengenai faktor-faktor lain yang mungkin mempengaruhi nilai tukar rupiah. Dalam analisis ini, guru dapat mengarahkan siswa menggunakan data yang tersedia, namun juga dapat meminta siswa mengakses sumber data yang tertera agar dapat melakukan analisis yang lebih tepat dengan menggunakan data yang lebih banyak dengan rentang tahun yang lebih panjang.

Siswa yang menyelesaikan latihan lebih cepat dapat diminta untuk melanjutkan analisis data mereka yang sudah dilakukan pada subbab sebelumnya dengan menentukan koefisien korelasi dan koefisien determinasinya. Setelah itu melakukan interpretasi akhir untuk hubungan kedua variabel tersebut menggabungkan semua hal yang telah mereka pelajari pada bab ini.

Kunci Jawaban Latihan 3.5

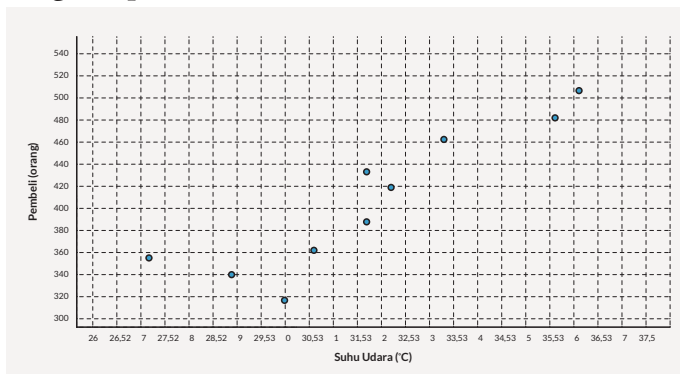
7. a. −0,5, b. 0,5, c. 0,95, d. 0, e. −0,95
8. a. $r = 1$, b. $r = 0{,}5$, c. $r = -0{,}5$, d. $r = -1$, e. $r = 0{,}866$, f. $r = -0{,}5$, g. $r = 0{,}3273$, h. $r = -0{,}5$
9. a) (jawaban masing-masing siswa)

   b) Diagram pencar

   c) Koefisien korelasi mendekati 1.

   d) $r = 0{,}8562$, (jawaban masing-masing siswa)

   Catatan: perhitungan sangat sensitif dengan pembulatan sehingga ada kemungkinan jawaban siswa berbeda. Direkomendasikan bahwa semua perhitungan nilai sementara menggunakan 4 angka di belakang koma.

10. a) $SS_{xy} = 1452{,}32$, $SS_{xx} = 69{,}561$ dan $SS_{yy} = 37258{,}4$.

   b) Diagram pencar

   c) Ada hubungan positif antara suhu udara dan banyak pembeli.

d) $\hat{y} = -255,87 + 20,878x$

e) Nilai a berarti ketika suhu sama dengan 0°C maka jumlah pembeli adalah −255,87 atau −256 orang. Nilai b berarti setiap kali suhu meningkat 1°C, pembeli meningkat 20,878 atau 21 orang.

f) $r = 0,9021$

g) ada korelasi positif linear yang kuat antara suhu dan banyak pembeli.

h) Ketika $x = 22,8$, maka $\hat{y} = -255,87 + 20,878(22,8)$. Oleh karena jumlah orang harus bulat maka menjadi 220 pembeli. Nilai $x = 22,8$ berada di luar rentang data sehingga prediksi tidak akurat.

Kunci Jawaban Latihan 3.6

1. 82,42% dari kalori diterangkan oleh kandungan lemak (gram).
2. a) $r^2 = 0,4467$

   Catatan: perhitungan sangat sensitif dengan pembulatan sehingga ada kemungkinan jawaban siswa berbeda. Direkomendasikan bahwa semua perhitungan nilai sementara menggunakan 4 angka di belakang koma.

   b) 44,67% dari kalori diterangkan oleh kandungan gula (gram).

   Catatan: Pada bagian ini, guru dapat meminta siswa untuk memikirkan kemungkinan mengenai persentase selebihnya yaitu 100% − 44,67% = 55,33% diterangkan/dipengaruhi oleh apa lagi.

Diferensiasi

Bagi siswa yang kecepatan belajarnya tinggi (*advanced*), minta mereka mengerjakan Latihan tanpa bantuan. Pada saat yang sama, guru dapat mendampingi siswa yang mengalami kesulitan.

Ayo Berefleksi

Tutup pembelajaran dengan meminta siswa melakukan refleksi terhadap apa yang sudah mereka pelajari dengan menuliskannya secara eksplisit materi yang sudah dipelajari dan refleksi aspek lain melalui pertanyaan penuntun.

Kunci Jawaban Uji Kompetensi

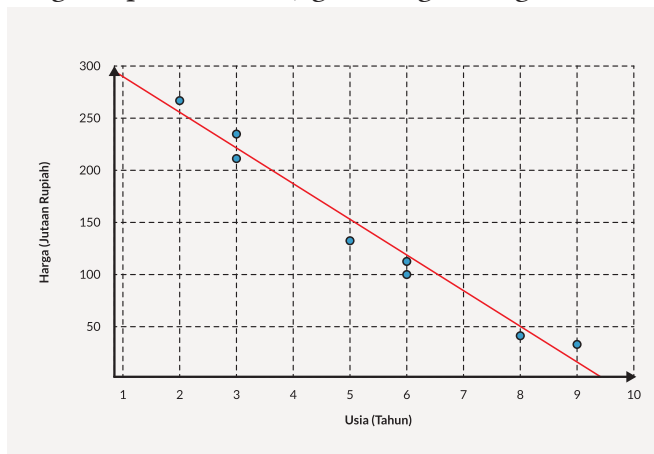
1. Diagram 1: a) ada, b) linear, c) positif

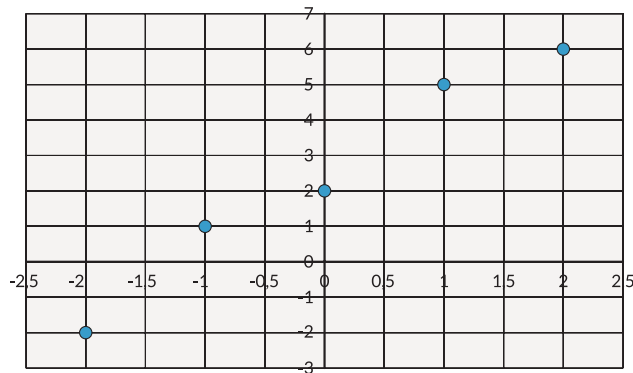
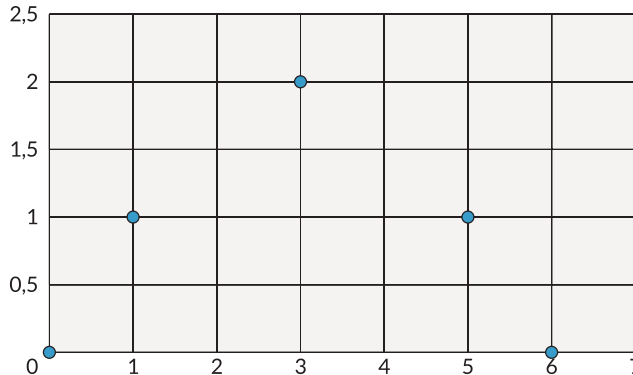
   Diagram 2: a) ada, b) linear, c) negatif

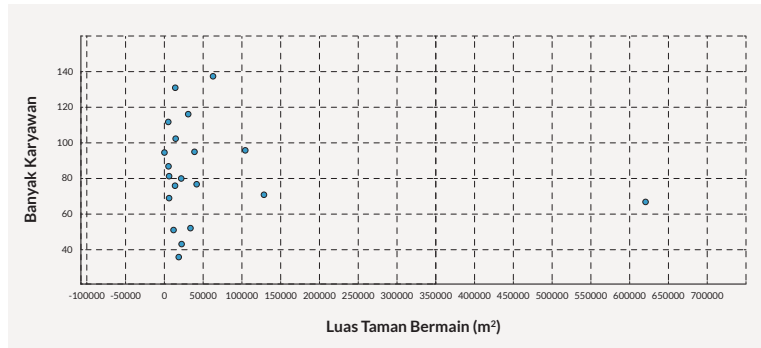
   Diagram 3: a) ada, b) kurva/non-linear, c) positif

   Diagram 4: a) ada, b) linear, c) negatif

2. a) korelasi positif
   b) tidak berkorelasi (korelasi mendekati 0)
   c) korelasi positif
   d) korelasi negatif

3. a) Diagram pencar dan e) gambar garis regresi

   b) Ya, memiliki hubungan linear.
   c) $\hat{y} = 322{,}4483 - 34{,}4425x$
   d) Nilai a artinya ketika usia mobil adalah 0 tahun, maka harganya 322,4483 juta rupiah. Nilai b artinya setiap usia mobil bertambah 1 tahun, harga turun sebesar 34,4425 juta rupiah.
   e) Ketika $x = 7$, maka $\hat{y} = 322{,}4483 - 34{,}4425(7) = 81{,}3508$ sehingga prediksi harganya adalah 81,3508 juta rupiah.
   f) Ketika $x = 18$, maka $\hat{y} = 322{,}4483 - 34{,}4425(18) = -297{,}5167$ sehingga prediksi harganya adalah −297,5167 juta rupiah.
   g) Prediksi di atas tidak tepat karena harga mobil tidak dapat negatif yang diakibatkan oleh prediksi berlebihan di mana $x = 18$ tidak berada dalam rentang data.

4. a. 0,52, b. 0,25, c. −0,06, d. 0,40, e. 0,85, f. 0,66, g. 0,90, h. 0,74
5. a) $r = 0{,}7071$
   b) $r = 0{,}7071$
6. a) Siswa akan memperoleh gradien yang sama ketika mereka hanya menggunakan satuan yang berbeda namun mereka akan memperoleh gradien yang berbeda ketika menukar posisi variabel x dan y.
   b) Ya, meskipun terdapat garis yang mempunyai gradien yang berbeda, nilai koefisien korelasi akan tetap sama karena tetap menyatakan hubungan antara variabel x dan y.
7. a) $r = 0{,}9853$ dan $r^2 = 0{,}9709$

   b) $r = 0$ dan $r^2 = 0$

8. a) gradien bernilai positif
   b) gradien bernilai negatif
   c) gradien bernilai 0
   d) gradien tidak dapat ditentukan (bisa positif atau negatif)

9. a) 55,8% dari persentase kemiskinan diterangkan oleh persentase kelulusan SMA.
   b) r = 0,747
   c) Tidak, karena mempunyai korelasi tidak berarti sebab-akibat. Ada variabel lain yang juga berperan dalam penurunan persentase kemiskinan.
10. a) Diagram pencar

   b) $\hat{y}$ = 85,334 – 0,0000259x
   c) r^2 = 0,016
   d) Garis di atas tidak akan memberikan hasil yang akurat karena nilai r^2 yang sangat kecil.
   e) Jika data (620,231; 67) dihapus maka garis regresi yang baru adalah $\hat{y}$ = 83,402 + 0,0000387x
   f) Penghapusan data tersebut sangat memengaruhi perubahan garis regresinya karena data tersebut merupakan data yang keluar jauh dari kumpulan data lainnya.

Pengayaan

Proyek ini bersifat opsional dan dapat diberikan sebagai tugas tambahan mengenai pencarian permasalahan nyata, kemudian membuat diagram pencar, menentukan persamaan garis regresi, menghitung koefisien korelasi, menghitung koefisien determinasi dan interpretasinya secara menyeluruh. Salah satu rekomendasinya adalah memeriksa kadar lemak (dalam gram) dan garam (dalam miligram) per sajian dari 30 jenis makanan yang berbeda. Tugas ini juga dapat disesuaikan dengan ide menarik atau hal lain yang ingin dianalisis oleh siswa sesuai dengan minat dan bidangnya masing-masing.

Glosarium

berpikir kritis kemampuan untuk menggunakan berbagai jenis penalaran, menggunakan pemikiran sistem, menganalisis dan mengevaluasi keadaan, berpikir reflektif, melakukan sintesis terhadap beberapa argumen untuk membuat sebuah keputusan dalam upaya penyelesaian masalah.

busur lingkaran Bagian dari lingkaran.

data bivariat Data yang terdiri dari dua variabel kuantitatif.

desmos Perangkat lunak berbasis web dan aplikasi telepon pintar yang dapat digunakan sebagai kalkulator dasar, kalkulator saintifik, kalkulator grafik, alat geometri, dan pembuat aktivitas matematika interaktif.

diameter Ruas garis yang menghubungkan dua titik pada lingkaran yang melalui pusat lingkaran.

domain (daerah asal) Himpunan yang memuat nilai-nilai masukan (input) di mana fungsi tersebut terdefinisi.

ekstrapolasi Penggunaan hubungan antar variabel untuk memprediksi nilai yang berada di luar jangkauan data.

flipped classroom Pendekatan belajar dengan siswa menerima materi pelajaran di luar kelas (biasanya disampaikan dalam video-video pembelajaran) dan melakukan aktivitas pembelajaran yang berpusat siswa di dalam kelas (atau tatap muka).

fungsi Pemetaan setiap anggota himpunan kepada (tepat satu) anggota himpunan yang lain.

fungsi bijektif Fungsi di mana setiap anggota himpunan dari daerah asal (Domain) tepat mempunyai satu pasangan dari himpunan daerah kawan (Kodomain) dan sebaliknya.

fungsi injektif Fungsi di mana anggota berbeda dari himpunan daerah asal (Domain) mempunyai pasangan yang berbeda dari himpunan daerah kawan (Kodomain).

fungsi surjektif Fungsi di mana anggota himpunan daerah hasil (Range) sama dengan anggota himpunan daerah kawan (Kodomain).

garis *best-fit* Garis yang paling mewakili data pada diagram pencar.

garis singgung Garis yang menyinggung lingkaran pada tepat satu titik.

interpolasi Penggunaan hubungan antarvariabel untuk memprediksi nilai yang berada di dalam jangkauan data.

invers fungsi Fungsi di mana pemetaan anggotanya merupakan kebalikan dari pemetaan fungsi aslinya.

jari-jari Jarak setiap titik pada lingkaran dengan pusat lingkaran.

jigsaw Salah satu tipe pembelajaran aktif yang terdiri dari tim-tim belajar heterogen beranggotakan 4–5 orang dan setiap peserta didik bertanggung jawab atas penguasaan bagian materi belajar dan mampu mengajarkan bagian tersebut kepada anggota lain.

Kecakapan Abad Ke-21 Kecakapan, keterampilan, atau kompetensi yang dibutuhkan di abad ke-21, yang meliputi keterampilan hidup dan karier, keterampilan belajar dan berinovasi (berpikir kritis, komunikasi, kolaborasi, dan kreativitas), serta keterampilan informasi, media, dan teknologi.

Kemampuan Berpikir Aras Tinggi Kemampuan untuk menganalisis, mengevaluasi, dan mencipta.

kodomain (daerah kawan) Himpunan yang memuat nilai-nilai keluaran dari fungsi.

koefisien determinasi Proporsi (persentase) dari variabel dependen yang diterangkan oleh variabel independen.

koefisien korelasi Ukuran deskriptif numerik dari suatu korelasi.

kolaborasi Kemampuan bekerja dengan orang lain di dalam kelompok untuk mencapai tujuan bersama.

komposisi fungsi Penggabungan dua atau lebih operasi fungsi yang dapat dilakukan dengan syarat tertentu.

komunikasi Kemampuan menyampaikan dan mendengarkan ide, gagasan, dan bentuk lain secara efektif.

kreativitas Kemampuan untuk berpikir (menggunakan ide yang luas membuat ide baru, serta mengelaborasi, memperbaiki, menganalisis, dan mengevaluasi ide sendiri untuk perbaikan ide tersebut) dan bekerja dengan orang lain secara kreatif, serta kemampuan untuk mengimplementasikan inovasi.

lingkaran Tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya sama dari pusat lingkaran).

motivasi Suatu kehendak atau disposisi untuk terlibat dan bertahan di tugas tertentu.

pembelajaran kooperatif Model pembelajaran yang melibatkan kelompok-kelompok kecil yang menggunakan struktur tugas, insentif, dan motif untuk menghasilkan perilaku kooperatif.

pendidikan karakter Pendidikan yang mengembangkan nilai-nilai yang khas-baik dari siswa untuk diimplementasikan ke dalam lingkungan di sekitarnya.

pengayaan Suatu kegiatan pembelajaran yang ditujukan untuk siswa yang memiliki kecepatan belajar tinggi agar mereka dapat memanfaatkan waktu belajarnya untuk memperdalam dan memperluas materi yang mereka pelajari.

penilaian Kegiatan pengumpulan dan pengolahan informasi yang dimaksudkan untuk mengukur pencapaian hasil belajar siswa.

penyingkapan terbimbing Pendekatan berpusat siswa yang tujuannya untuk menciptakan suatu lingkungan belajar agar siswa mampu menemukan atau menyingkap konsep, prinsip, atau prosedur tentang konten pembelajaran tertentu dengan bimbingan yang diperlukan.

range (daerah hasil) Himpunan yang memuat nilai-nilai keluaran yang berpasangan dengan nilai-nilai masukan.

refleksi Aktivitas menganalisis pengalaman, kemampuan, atau keterampilan yang bertujuan untuk pembelajaran dan perbaikan di masa mendatang.

regresi linear Model regresi yang memberikan hubungan garis lurus antara dua variabel.

relasi Hubungan antara anggota suatu himpunan dengan anggota dari himpunan lainnya.

remedial Suatu kegiatan yang direncanakan dan dilakukan untuk memperbaiki hasil belajar bagi siswa yang mengalami kesulitan belajar.

residu Selisih antara nilai variabel dependen yang diamati dan nilai variabel dependen yang diprediksi.

rubrik Pedoman penilaian yang berisi aspek-aspek atau kategori-kategori penilaian yang jelas dan digunakan untuk mengukur hasil pekerjaan siswa.

segiempat tali busur Segiempat yang keempat sudutnya terletak pada lingkaran.

sudut pusat Sudut yang terletak pada pusat lingkaran dan menghadap pada busur tertentu.

sudut keliling Sudut yang terletak pada keliling lingkaran dan menghadap pada busur tertentu.

tali busur Ruas garis yang menghubungkan dua titik pada lingkaran.

teorema Thales Teori yang menyatakan sudut keliling yang menghadap pada diameter lingkaran adalah sudut siku-siku.

teorema Ptolemeus Teori yang menyatakan pada segiempat tali busur, hasil kali diagonal sama besarnya dengan jumlah dari hasil kali sisi yang berhadapan.

tes garis vertikal Salah satu cara menentukan apakah sebuah relasi merupakan fungsi melalui grafiknya; cukup dengan menggeser garis vertikal dari kanan ke kiri (atau sebaliknya) dan melihat jumlah titik potong yang dihasilkan.

think-pair-share Salah satu model pembelajaran kooperatif dengan meminta siswa memikirkan sendiri terlebih dahulu, kemudian mendiskusikan dengan pasangan, dan akhirnya menyampaikan kepada seluruh kelas.

tutorial sebaya Strategi pembelajaran yang diterapkan guru kepada siswa untuk membantu satu sama lain belajar dan membelajarkan diri sendiri dengan mengajar.

variabel independen Variabel yang akan digunakan untuk membuat prediksi terhadap nilai variabel dependen.

variabel dependen Variabel yang nilainya dipengaruhi oleh variabel independen.

Daftar Pustaka

Core-Plus Mathematics. 2009. *Contemporary Mathematics in Context: Course 3 Student Edition*. McGraw-Hill.

Mann, P.S. 2013. *Introductory Statistics (Eighth Edition)*. John Wiley & Sons.

McClave, J.T., & Sincich, T. 2013. *Statistics (Twelfth Edition)*. Pearson Education, Inc.

Peck, R., Olsen, C., & Devore, J.L. 2016. *Introduction to Statistics & Data Analysis (Fifth Edition)*. Cengage Learning.

Pritchard, C. (Ed.). 2003. *The changing shape of geometry: celebrating a century of geometry and geometry teaching*. Cambridge University Press.

Serra, M. 2008. *Discovering Geometry: an Investigative Approach*. Key Curriculum Press.

Skrakowski, J., Smith, H., et al. 2019. *Pearson Edexcel International A Level Statistics 1 (Student Book)*. Pearson Education Limited.

Watkins, A.E, Scheaffer, R.L., & Cobb, G.W. 2008. *Statistics in Action: Understanding a Word of Data (Second Edition)*. Key Curriculum Press.

Daftar Sumber Gambar

https://www.liputan6.com

https://xkcd.com

https://en.wikipedia.org/wiki/Karl_Pearson

https://www.merdeka.com/leonardo-da-vinci/

https://www.sciencedirect.com/topics/earth-and-planetary-sciences/solar-eclipse

https://en.wikipedia.org/wiki/Thales_of_Miletus

https://indocropcircles.wordpress.com/2014/09/19/misteri-artefak-artefak-di-gunung-padang/

Indeks

B

busur lingkaran 68, 76, 77, 80, 81, 93, 110, 114, 172

D

diagram pencar vii, viii, 129, 131
diagram scatter vii, 129, 131
diameter 74

G

garis singgung 67, 68, 69, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 116, 119, 173

J

jari-jari 74, 88

K

koefisien determinasi 130
koefisien korelasi ix
korelasi vii, viii, ix, 130, 155
korelasi product moment 130

L

lingkaran vii, 67, 69, 70, 71, 73, 87, 89, 93, 100, 102, 104, 106, 107, 112, 119

M

metode kuadrat terkecil 129

R

regresi linear viii, 129, 141
residu viii

S

segiempat tali busur 67, 108, 109, 110, 111, 112, 116, 117, 119, 124, 126, 175
sudut keliling 69, 71, 75, 76, 77, 80, 81, 82, 83, 84, 86, 87, 88, 92, 93, 111, 112, 115, 122, 124, 175
sudut pusat 69, 71, 76, 80, 82, 86, 93, 109, 122, 124, 175

T

tali busur 67, 68, 70, 74, 77, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 114, 115, 116, 117, 119, 121, 122, 123, 124, 126, 175
teorema Ptolemeus 117, 123, 175
teorema Thales 88, 90, 175
trend viii

Biodata Pelaku Perbukuan

Biodata Penulis

Nama Lengkap : Dicky Susanto, Ed.D

E-mail : dicky.susanto@calvin.ac.id

Akun Facebook : Dicky Susanto

Alamat Kantor : Menara Calvin Lt. 8, RMCI. Jl. Industri Blok B14 Kav. 1 Kemayoran, Jakarta Pusat 10610, Indonesia

Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Head of Instructional Design dan Dosen, Calvin Institute of Technology (2019–sekarang)
2. Head of Instructional Design dan Dosen, Indonesia International Institute of Life Sciences (2016–2019)
3. Education Consultant, Curriculum Developer and Teacher Trainer (2015–sekarang)
4. Postdoctoral Research Associate, North Carolina State University (2012–2014)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3: Program Studi Pascasarjana Pendidikan Matematika, Boston University, Massachusetts, USA (2004-2009)
2. S2: Program Studi Pascasarjana Pendidikan Matematika, Boston University, Massachusetts, USA (2002-2003)
3. S1: Program Studi Teknik Kimia, Institut Teknologi Indonesia, Tangerang (1992-1997)

Judul Buku dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Pengarah Materi untuk Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Kelas Awal (Modul Belajar Siswa, Modul Guru, dan Modul Orang Tua) (2020-2021)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. "Coordinating Multiple Composite Units as a Conceptual Principle in Time Learning Trajectory" (2020)

Biodata Penulis

Nama Lengkap	:	Savitri K. Sihombing, M.Sc.
E-mail	:	savitri.sihombing@gmail.com
Akun Facebook	:	Savitri Sihombing
Alamat Kantor	:	Yayasan Sinergi Mencerdaskan Tunas Negeri Jalan Scientia Boulevard Barat Blok DRWB no 8 Sektor Ruko Darwin, Summarecon Serpong Tangerang, Banten 15334
Bidang Keahlian	:	Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Tim Akademik Matematika, Yayasan Sinergi Mencerdaskan Tunas Negeri (2017-sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Program Studi Pascasarjana Applied Mathematics, University of Twente, Enschede, The Netherlands (2003-2005)
2. S1: Program Studi Teknik Elektro, Institut Teknologi Bandung, Bandung, Indonesia (1996-2001)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 1 Diriku Subtema 2 Budaya Hidup Sehat*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
2. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 1 Diriku Subtema 2 Budaya Hidup Sehat*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
3. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 1 Diriku Subtema 2 Budaya Hidup Sehat*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
4. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 2 Makhluk Hidup dan Benda Mati di Lingkungan Kita Subtema 3 Makhluk Hidup dan Benda Mati,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
5. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 2 Makhluk Hidup dan Benda Mati di Lingkungan Kita Subtema 3 Makhluk Hidup dan Benda Mati,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
6. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 3 Pancaindra Subtema 2 Pancaindra dan Lingkungan,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
7. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 4 Memelihara Diri dan Lingkungan Kita Subtema 2 Merawat Lingkunganku,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
8. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping*

Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 5 Lingkungan dan Alam Indonesiaku Subtema 2 Denah Lingkunganku, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

9. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 6 Benda dan Materi Subtema 2 Bahan Dasar*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
10. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 7 Bumi dan Benda di Langit Subtema 2 Bulan dan Bintang*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
11. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 8 Profesi Subtema 2 Produsen*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
12. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 9 Perayaan Subtema 2 Hari Besar Nasional*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

Biodata Penulis

Nama Lengkap : Marianna Magdalena Radjawane, M.Si.
E-mail : marianna.radjawane@gmail.com
Akun Facebook : Marianna Magdalena Radjawane
Alamat Kantor : -
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika dan IPAC

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Dosen Jarak Jauh STKIP Terang Bangsa Timika (2020-sekarang)
2. Konsultan Pendidikan, Pengembang Kurikulum dan Pelatih Guru (2013-sekarang)

3. Guru Fisika SMA Cita Buana Jakarta (2013-2015)
4. Divisi Pelatihan Guru Surya Institute (2011-2013)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Program Studi Pascasarjana Fisika, Institut Teknologi Bandung (1990-1993)
2. S1: Program Studi Astronomi, Institut Teknologi Bandung (1983-1989)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 1 Diriku Subtema 3 Aktivitas yang Menyehatkan*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
2. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 1 Diriku Subtema 3 Aktivitas yang Menyehatkan*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
3. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 2 Makhluk Hidup dan Benda Mati di Lingkungan Kita Subtema 2 Serangga dan Hewan Kecil*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
4. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 2 Makhluk Hidup dan Benda Mati di Lingkungan Kita Subtema 2 Serangga dan Hewan Kecil*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
5. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 3 Pancaindra Subtema 3 Kesehatan Pancaindra*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
6. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi*

Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 3 Pancaindra Subtema 3 Kesehatan Pancaindra, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

7. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 3 Pancaindra Subtema 3 Kesehatan Pancaindra*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
8. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 4 Memelihara Diri dan Lingkungan Kita Subtema 3 Merawat Hewan dan Lingkungan*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
9. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 4 Memelihara Diri dan Lingkungan Kita Subtema 3 Merawat Hewan dan Lingkungan*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
10. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 5 Lingkungan dan Alam Indonesiaku Subtema 3 Pulauku*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
11. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 5 Lingkungan dan Alam Indonesiaku Subtema 3 Pulauku,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
12. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 6 Benda dan Materi Subtema 3 Karakteristik Benda Cair*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
13. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 6 Benda dan Materi Subtema 3 Karakteristik Benda Cair,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
14. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 7 Bumi dan Benda di Langit Subtema 3 Awan, Modul,* Kemdikbud, Jakarta.

15. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 7 Bumi dan Benda di Langit Subtema 3 Awan, Modul*, Kemdikbud, Jakarta.
16. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 8 Profesi Subtema 3 Petani,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
17. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 8 Profesi Subtema 3 Petani,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
18. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 9 Perayaan Subtema 3 Hari Istimewa Keluarga*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
19. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 9 Perayaan Subtema 3 Hari Istimewa Keluarga, Modul*, Kemdikbud, Jakarta.
20. *Contributor in Excel in Science Grade 4*, Oxford University Press (2018)
21. *Science Gasing Kelas 3-6*, Penerbit Kandel (2013)

Biodata Penulis

Nama Lengkap : Yulian Candra, B.Sc., S.Pd.
E-mail : yulian.candra@santa-laurensia.sch.id
Akun Facebook : Yulian Candra
Alamat Kantor : Jl. Sutera Utama No.1, Alam Sutera, Serpong Utara, Kota Tangerang Selatan, Banten, 15325
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. *Senior High School Mathematics Supervisor*, SMA Santa Laurensia (2017–sekarang)
2. *Head of Mathematics and Science Department*, UPH College (2013–2017)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. Non-gelar: Program *Teacher Training – MEXT, Master's Program in Education, University of Tsukuba* (2019–2021)
2. S1: *Teachers College*, Pendidikan Matematika, Universitas Pelita Harapan (2008–2012)

Biodata Penulis

Nama Lengkap : Daniel Sinambela
E-mail : dsf25@umsystem.edu
Alamat Kantor : 202 Math Sciences Building 810 East Rollins Street Columbia, MO 65211
Bidang Keahlian : Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Dosen (pengajar) *College algebra, Business Calculus, Calculus* 1 *and* 2, *University of Missouri*, Columbia, USA (2015–2019)
2. Dosen (pengajar) *Ordinary Differential equations*, *University of Missouri*, Columbia, USA (2020–sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3: Program Studi Pascasarjana Matematika Terapan, *University of Missouri*, Columbia, USA (2018–Sekarang)
2. S2: Program Studi Pascasarjana Matematika Murni, *University of Missouri*, Columbia, USA (2015–2018)
3. S1: Program Studi Matematika Murni, dengan minor di Statistik, *University of Missouri*, Columbia, USA (2012–2015)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. "*Asymptotic properties of deep water solitary waves with compactly supported vorticity*" (2018) https://mospace.umsystem.edu/xmlui/handle/10355/66212
2. "*Large-amplitude Solitary Waves in Two-layer Density Stratified Water*" (2020) to appear on SIAM journal on Mathematical Analysis https://arxiv.org/pdf/2012.00142.pdf
3. "*Orbital Stability of Solitary Waves in Two-Layered Stratified Water with Constant Vorticity*" (Ongoing)

Biodata Penelaah

Nama Lengkap : Prof. Dr. Widowati, S.Si., M.Si.
E-mail : widowati.math@gmail.com
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : FSM, Universitas Diponegoro, Jl. Prof. H. Soedharto, SH, Tembalang, Semarang
Bidang Keahlian : Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Dosen Tetap Jurusan Matematika, Universitas Diponegoro, Semarang (1994–sekarang)
2. Ketua Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Diponegoro, Semarang (2008–2011)
3. Pembantu Dekan II Fakultas Sains dan Matematika (FSM), Universitas Diponegoro, Semarang (2011–2015)
4. Dekan Fakultas Sains dan Matematika (FSM), Universitas Diponegoro Semarang (2015–sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3: Jurusan Matematika, Institut Teknologi Bandung (ITB), Bandung, lulus tahun 2005

2. S2: Jurusan Matematika, Institut Teknologi Bandung (ITB), Bandung, lulus tahun 2000
3. S1: Jurusan Matematika, Universitas Diponegoro (Undip), Semarang, lulus tahun 1993

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. *Sistem Kendali Optimal: Teori dan Aplikasinya di Bidang Inventory.* 2020. Penerbit Undip Press.
2. *Penerapan Teknologi dan Proses Produksi KJABB-IMTA. 2019.* Penerbit Undip Press. ISBN; 978-979-097-591-0 B.54
3. *Modul Teknik Budidaya Sistem Integrated Multi-Thropic Aquaculture (IMTA). 2019.* Penerbit Undip Press. ISBN: 978-979-097-594-1.
4. *Metode Kendali Diskret:Teori dan Simulasinya. 2017.* Penerbit Undip Press. ISBN: 978-979-097-643-0.
5. *Pemodelan Matematika: Analisis dan Aplikasinya. 2013.* Penerbit Undip Press. ISBN: 978-602-097-370-8.
6. Kalkulus. 2012. Penerbit Undip Press. ISBN: 978-602-097-329-6.
7. *Pemodelan Matematika Berbasis Maple. 2011.* Jurusan Matematika FMIPA Undip.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

1. "Implementation of an Optimal Control for Reducing Individuals Infected by Hepatitis B Virus". 2021.
2. "Mathematical Modeling and Analysis of Covid-19 Transmission Dynamics in Central Java Province, Indonesia". 2021.
3. "Investigating the Features of Indonesia Stock Price during Covid-19 Pandemic: An Application of Merton Jump Diffusion Model. 2021.
4. "1d-2d Numerical Model for Wave Attenuation by Mangroves as a Porous Structure". 2021.
5. "Piecewise Objective Optimisation Model for Inventory Control Integrated with Supplier Selection Considering Discount". 2021

Selengkapnya, kunjungi Akun Profil Penelaah:

1. Scopus ID: 8255360300
   https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=8255360300
2. ORCID iD: 0000-0002-4372-6501
   https://orcid.org/0000-0002-4372-6501
3. Sinta ID: 6007839
   https://sinta.ristekbrin.go.id/authors/detail?id=6007839&view=overview
4. Google Scholar ID: CczqHJ4AAAAJ
   https://scholar.google.co.id/citations?user=CczqHJ4AAAAJ&hl=id

Biodata Penelaah

Nama Lengkap	:	Dr. Ali Mahmudi
E-mail	:	alimahmudi@uny.ac.id
Instansi	:	FMIPA UNY
Alamat Instansi	:	Jalan Colombo No 1 Karangmalang Yogyakarta
Bidang Keahlian	:	Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 tahun Terakhir:

1. Dosen FMIPA UNY

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S1 Pendidikan Matematika FKIP Universitas Sebelas Maret Surakarta lulus tahun 1997
2. S2 Pendidikan Matematika Program Pascasarjana Universitas Negeri Surabaya (UNESA) lulus tahun 2003
3. S3 Pendidikan Matematika Sekolah Pascasarjana Universitas Pendidikan Indonesia (UPI) lulus tahun 2010

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. "Pengembangan Bahan Ajar Matematika dengan Pendekatan Kontekstual untuk Pembelajaran di SMK". 2015.
2. "Pengembangan Bahan Ajar Geometri Berbasis Kontekstual untuk Meningkatkan Kemampuan Pemecahan Masalah dan Disposisi Matematis". 2017.
3. "Pengembangan Buku Ajar Struktur Aljabar Berbasis Pendekatan Deduktif di Universitas Riau Kepulauan Batam". 2018.
4. "Pengembangan Model Micro Teaching untuk Meningkatkan Pedagogical Content Knowledge Mahasiswa Calon Guru Matematika". 2018.
5. "Pengembangan Model Pembelajaran Matematika Berbasis Masalah dengan Pendekatan Humanis yang Berorientasi pada Math-Literacy dan Pengelolaan Math-Anxiety Siswa". 2019.
6. "Pengembangan Buku Ajar Geometri Eksploratif Berbasis HOTS". 2020.
7. "Desain Instruksional Berpikir Komputasi dalam Pembelajaran Matematika Realistik". 2021.
8. "The Analysis of the Gakkohtosho's Mathematics Textbook Using the Cognitive Load Theory Perspective". 2021

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

Penelaah Buku Teks Pelajaran Matematika Kelas IX Kemdikbud, 2014.

Biodata ilustrator

Nama Lengkap : Faris Majduddin Naufal, S.M

E-mail : farismnaufal@gmail.com

Akun Facebook : Faris Naufal

Alamat Kantor : Monoponik Studio. Jl. Otto Iskandar Dinata No. 458, Bandung

Bidang Keahlian : Desain Grafis & Ilustrasi

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Co Founder & Principal Designer, Monoponik Studio (2012-sekarang)
2. Marketing Staff (Internship), Mahanagari Nusantara (2012)
3. Visual Artist / Illustrator (2010-sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S1: Manajemen Bisnis, Telkom University (2009-2015)

Karya/Pameran/Eksibisi dan Tahun Pelaksanaan (10 tahun terakhir)

1. 111 Buya Hamka Exhibition, Universitas Al Azhar, Jakarta (2019)
2. All The Small Things, Qubicle, Jakarta (2017)
3. Seek A Seek Exhibition (with Monoponik), Dia.Lo.Gue, Jakarta (2016
4. Reset Collective Exhibition, N-Workshop, Yogyakarta (2016)
5. Super Robot Day, Bandung (2015)
6. Canstop, Gardu House, Jakarta (2014)
7. Rupanada (with Monoponik), Jogja Gallery, Yogyakarta (2014)
8. 10th Pictoplasma, Berlin, Jerman (2014)
9. Ace&King (Aceking Sketch Squad), Sanggar Mitra, Bandung (2014)
10. Odessa Draw, Odessa, Ukraina (2013)
11. Indonesia Kreatif (PPKI), Epicentrum Walk, Jakarta (2012)
12. Indonesia Kreatif (PPKI), JEC, Jakarta (2011)
13. Postcard Untuk Sahabat (Tugitu Unite), Gedung Kesenian Solo, Solo (2011)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa Kelas 3 Tema 1,3-9 Subtema 3*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
2. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Pendamping Bagi Guru Kelas 3 Tema 1,3-9 Subtema 3*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

3. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 1,3-9 Subtema 3*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. "*Pengaruh Word of Mouth Marketing* Melalui Media Twitter @ FLAMEONfootmate Terhadap Keputusan Pembelian Konsumen Tahun 2014" (2015)

Biodata Penyunting Naskah

Nama Lengkap : Tri Hartini, S.S.
E-mail : trihartini2703@gmail.com
Akun Facebook : Tri Hartini
Alamat Kantor : -
Bidang Keahlian : Editing buku/naskah, proof read

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

Menjadi editor lepas di beberapa penerbit di Yogyakarta

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

Fakultas Sastra/Ilmu Budaya Universitas Gadjah Mada Yogyakarta (1992-1998) jurusan Sastra Indonesia spesialisasi bidang Linguistik.

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 tahun terakhir):

Salam 3 Jari Leadership ala Jokowi. 2014. Yogyakarta: Penerbit Kanisius

Informasi Lain

selama 20 tahun bekerja sebagai editor, telah menyunting banyak buku dengan berbagai jenis tema seperti keagamaan, politik, sains, humaniora (filsafat, sosial, hukum, bahasa, sastra, seni) dan lain-lain, baik naskah asli maupun terjemahan, di beberapa penerbit di Yogyakarta

Biodata Penata Letak (Desainer)

Nama Lengkap : M. Firdaus Jubaedi
E-mail : muhafir@gmail.com
Akun Facebook : Muhammad Firdaus Tjl
Alamat Kantor : -
Bidang Keahlian : Desain Grafis

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Koordinator tim pengolah naskah Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh (2020-2021)
2. Staf pada Pusat Analisis dan Sinkronisasi Kebijakan (PASKA) Kemendikbud (2019-2020)
3. Staf pada Staf Ahli Mendikbud bidang pembangunan karakter (2018-2019)
4. *Audio Visual Designer* di Cita Rasa Prima Indonesia Berjaya (2016-2018)
5. *Intern Junior Art Director* di Syafa'at Marcomm (2014)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S1: Desain Komunikasi Visual, Institut Teknologi Nasional Bandung (2011-2016)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa Kelas 1 Tema 1-9 Subtema 1*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
2. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Pendamping Bagi Guru Kelas 1 Tema 1-9 Subtema 1*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
3. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 1-9 Subtema 1*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
4. Direktorat Pembinaan PAUD (2019), *Penduan Praktis Penguatan Pendidikan Karakter pada Pendidikan Anak Usia Dini*, Kemendikbud, jakarta
5. Direktorat Pembinaan PAUD (2019), *Pedoman Penguatan Pendidikan Karakter pada Pendidikan Anak Usia Dini*, Kemendikbud, Jakarta.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Tidak ada.

Biodata Penata Letak (Desainer)

Nama Lengkap : Adityo Bayuaji
E-mail : aditbayuaji@gmail.com
Bidang Keahlian : Desain Grafis

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. *Graphic Designer*, PT Ramesia Mesin Indonesia (2015-2017)
2. *Sr. Graphic Designer*, PT Rumah Jahit Khansa (2017-2019)
3. *Graphic Designer Coordinator*, PT Surganya Motor Indonesia (2019-Sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. D3: Desain Grafis, Politeknik Negeri Media Kreatif (2011-2014)
2. S1: Desain Komunikasi Visual, STMK Trisakti (2017-2018)